



**Vasco Veríssimo Oliveira Bento da Silva**

Licenciado em Engenharia Civil

**Elementos finitos híbridos-Trefftz de  
deslocamento para problemas de elasticidade  
plana**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Civil - Perfil de Estruturas e Geotecnia**

Orientador: Professor Doutor Dragoș Ionuț Moldovan  
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa  
Co-orientador: Professor Doutor Corneliu Cismașiu  
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade  
Nova de Lisboa

Júri

Presidente: Professora Doutora Maria Teresa Teles Grilo Santana  
Arguente: Professor Doutor Mário Jorge Vicente da Silva  
Vogal: Professor Doutor Dragoș Ionuț Moldovan



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Junho, 2016**



Copyright © Vasco Veríssimo Oliveira Bento da Silva, FCT/UNL e UNL.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.





# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador, Professor Ionuț, pela dedicação, paciência (bastante) e ajuda prestadas, que foram essenciais no desenvolvimento deste trabalho e na assimilação de conhecimentos, tanto a nível de programação, como de conceitos teóricos. Gostaria ainda de agradecer ao meu co-orientador, Professor Corneliu Cismașiu, por me ter dado a oportunidade de desenvolver esta tese.

Por fim, gostaria de agradecer à minha família e namorada pelo seu apoio incondicional e aos meus amigos e colegas, muito importantes ao longo de todo este percurso.



# Resumo

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que utilize o modelo de deslocamentos dos elementos finitos híbridos-Trefftz para a resolução de problemas elastostáticos planos, física e geometricamente lineares. A ferramenta desenvolvida neste trabalho irá incorporar uma plataforma computacional já existente, que abrange problemáticas nas áreas acústica e térmica, sendo a primeira aplicação estrutural implementada na plataforma.

Nos programas de cálculo automático existentes, a formulação utilizada baseia-se em elementos finitos conformes de deslocamento (convencionais). Estes elementos usam funções de aproximação que garantem implicitamente a satisfação local das equações de compatibilidade no domínio e fronteiras essenciais, apresentando no entanto descontinuidades nos campos de tensões. Assim, a sua utilização resulta, tipicamente, na obtenção de soluções com aproximações dos campos de tensões de qualidade inferior às aproximações dos campos de deslocamentos. Para colmatar esta lacuna, uma das alternativas disponíveis é representada pelos elementos finitos híbridos-Trefftz, utilizados neste trabalho. Na formulação adotada, aproximam-se de forma independente os campos de deslocamentos no domínio dos elementos finitos e de forças nas suas fronteiras essenciais (Dirichlet e interiores). As funções de aproximação utilizadas nos elementos são condicionadas a satisfazer localmente todas as condições no domínio, não garantindo, no entanto, a compatibilidade local nas fronteiras essenciais, cuja imposição explícita se torna, por isso, necessária. Assim, estes elementos permitem a obtenção de soluções, que apesar de não serem nem localmente compatíveis nem localmente equilibradas, garantem um melhor equilíbrio entre a qualidade das aproximações dos campos de deslocamentos e de tensões. Estes elementos apresentam outras vantagens significativas, por exemplo, pelo facto de permitirem a utilização do refinamento ' $p$ ' localizado, ou por permitir a redução de todos os coeficientes do sistema governativo a integrais na fronteira.

De forma a avaliar o desempenho da formulação e da respetiva implementação computacional, procedeu-se à validação do funcionamento do programa desenvolvido, comparando os resultados obtidos pelo mesmo com a solução analítica do problema de uma viga em consola. Avaliou-se também o desempenho dos elementos híbridos-Trefftz implementados no programa quando comparados com elementos que utilizam a formulação convencional. Foi possível verificar a obtenção de resultados de melhor qualidade, e com menos graus de liberdade, com a formulação adotada neste trabalho face à formulação convencional. Testou-se ainda a aplicação dos elementos finitos híbridos-Trefftz a três casos de estudo de maior complexidade. Através de uma análise de convergência dos modelos estudados sob refinamentos ' $p$ ' e ' $h$ ', constatou-se

uma maior eficiência do refinamento ' $p$ '. É ainda possível concluir que mesmo para problemas envolvendo estruturas que apresentem descontinuidades geométricas caracterizadas por efeitos locais dominantes (concentração de tensões), a utilização de elementos híbridos-Trefftz permite recuperar estimativas de qualidade da solução.

**Palavras-chave:** Método dos elementos finitos, Problemas elastostáticos planos, Elementos finitos híbridos-Trefftz, Modelo de deslocamento

# Abstract

The main goal of this work is to develop a computational tool that uses the displacement model of the hybrid-Trefftz finite element formulation to solve physically and geometrically linear plane elasticity problems. The tool developed in this work is incorporated in an existing computational platform, that already includes finite elements for acoustic and heat conduction problems. This is the first structural application included in the platform.

In commercially available finite element software, the formulations are generally based on conforming displacement (conventional) finite elements. Conventional elements use approximation functions that implicitly satisfy the compatibility equations in every point of the domain of the elements and on their essential boundary (i.e. Dirichlet and interior). Such formulations present, however, discontinuities in the stress fields predictions. Therefore, their use generally yields stress field approximations with inferior quality when compared to the approximation of the displacement field. In order to overcome this drawback, hybrid-Trefftz displacement finite elements are used in this work. The formulation develops from the independent approximation of the displacement field in the domain of the elements, and of the tractions on their essential boundaries. The domain approximation of the hybrid-Trefftz finite elements is constrained to satisfy locally all domain equations, but do not implicitly satisfy the boundary compatibility equations. Therefore, the enforcement of these equations needs to be made explicitly (i.e. using additional equations). As compared to conventional finite elements, hybrid-Trefftz models recover solutions that, although neither locally compatible, not locally equilibrated, secure a better balance of the qualities of the displacement and stress fields. Moreover, hybrid-Trefftz elements endorse the use of localized ' $p$ '-refinement, without the need of recalculating all trial functions anew, and reduce all terms in the governing system to boundary integral expressions.

The formulation and its computational implementation are validated using a benchmark structural problem with analytical solution. The performance of the Trefftz elements is compared against that of conventional finite elements for the same problem. It is concluded that the former formulation is able to yield results with superior quality, using less degrees of freedom. Once completed the validation phase, the hybrid-Trefftz elements are applied to three structural problems of higher complexity. The efficiency of both ' $h$ '- and ' $p$ '-refinement in improving the quality of the finite element solutions is assessed. It is concluded that larger convergence rates are achievable using the basis (' $p$ '-) refinement. Overall, the hybrid-Trefftz formulation performed well in all tests, including those where the structural geometry was chosen such as to induce considerable stress concentration at some points of the structure.

**Keywords:** Finite elements method, Elastostatic plane problems, Hybrid-Trefftz finite elements, Displacement model

# Índice

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de abreviaturas e siglas</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e objetivo . . . . .	1
1.2 Elementos finitos . . . . .	3
1.3 Estado da arte . . . . .	4
1.4 Organização do trabalho . . . . .	8
<b>2 Apresentação do problema</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Hipóteses simplificativas do problema . . . . .	9
2.3 Equações governativas . . . . .	10
2.3.1 Equações no domínio . . . . .	10
2.3.2 Condições de fronteira . . . . .	18
2.3.3 Solução de um problema de elasticidade plana . . . . .	19
<b>3 Elementos finitos híbridos-Trefftz</b>	<b>23</b>
3.1 Introdução . . . . .	23
3.2 Discretização do meio . . . . .	24
3.3 Elementos híbridos-Trefftz de deslocamento para problemas de elasticidade plana	25
3.3.1 Aproximações . . . . .	25
3.3.2 Equações no domínio . . . . .	26

3.3.3	Equações na fronteira . . . . .	27
3.3.4	Sistema resolutivo . . . . .	28
3.3.5	Condição de Trefftz . . . . .	29
3.3.6	Funções de aproximação . . . . .	30
3.3.7	Indeterminação estática e cinemática . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Implementação computacional</b>	<b>37</b>
4.1	Introdução . . . . .	37
4.2	Metodologia adotada . . . . .	37
4.2.1	Sistemas de referência . . . . .	38
4.2.2	Fases da análise do modelo . . . . .	39
4.3	Pré-processamento . . . . .	41
4.3.1	Dados topológicos . . . . .	41
4.3.2	Estruturas de dados . . . . .	43
4.3.3	Outras definições . . . . .	47
4.4	Processamento . . . . .	47
4.4.1	Mapeamento do sistema . . . . .	47
4.4.2	Indeterminação cinemática . . . . .	49
4.4.3	Integração numérica . . . . .	50
4.4.4	Resolução do sistema . . . . .	51
4.5	Pós-processamento . . . . .	52
4.5.1	Campos de soluções . . . . .	52
4.5.2	Energia de deformação . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Resultados e discussão</b>	<b>55</b>
5.1	Introdução . . . . .	55
5.2	Validação do programa . . . . .	57
5.2.1	Viga de Timoshenko . . . . .	57
5.2.2	Validação com a solução analítica . . . . .	58
5.2.3	Comparação do modelo de EFHT com elementos finitos convencionais	60
5.3	Casos de estudo de maior complexidade . . . . .	67
5.3.1	Placa em 'L' . . . . .	67
5.3.2	Painel de Cook . . . . .	72
5.3.3	Placa com orifício circular . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>85</b>
6.1	Conclusões . . . . .	85
6.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	87
	<b>Referências</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Método dos resíduos pesados</b>	<b>95</b>



---

<b>B</b>	<b>Funções do programa</b>	<b>97</b>
<b>C</b>	<b>Sistemas de referência</b>	<b>99</b>
C.1	Mudança do referencial da fronteira para o referencial local polar . . . . .	99
C.2	Compatibilização do referencial local polar com o referencial normal-tangencial da fronteira . . . . .	100
C.3	Transformações de tensões e deslocamentos . . . . .	102
<b>D</b>	<b>Exemplo de utilização do software</b>	<b>105</b>
D.1	Descrição do problema . . . . .	105
D.2	Dados de entrada . . . . .	105
D.2.1	Definição das propriedades mecânicas do material . . . . .	106
D.2.2	Definição da malha . . . . .	106
D.2.3	Definição dos níveis de refinamento ' $p$ ' . . . . .	107
D.2.4	Definição das condições de fronteira . . . . .	108
D.2.5	Definição do número de pontos de Gauss e do número de divisões . . .	110
D.3	Organização dos dados . . . . .	110
D.3.1	Estruturas topológicas . . . . .	110
D.3.2	Estruturas de dados . . . . .	111
D.4	Representação gráfica dos resultados . . . . .	116



# Lista de figuras

2.1	Domínio do corpo, fronteiras de Neumann e Dirichlet . . . . .	11
2.2	Elemento diferencial sujeito a um estado de tensão . . . . .	12
2.3	Deformação normal $\varepsilon_x$ de um elemento diferencial . . . . .	13
2.4	Distorção $\gamma_{xy}$ de um elemento diferencial . . . . .	14
2.5	Exemplo de uma situação que induz um estado de tensão plana . . . . .	17
2.6	Exemplo de uma situação que induz um estado de deformação plana . . . . .	17
2.7	Superfície do meio atuada por forças externas . . . . .	18
2.8	Meio atuado por uma força $f$ . . . . .	20
3.1	Elementos finitos, fronteiras de Neumann, Dirichlet e interiores . . . . .	25
3.2	Sistema esparso e simétrico . . . . .	29
4.1	Sistemas de referência . . . . .	38
4.2	Gerador de malha regular . . . . .	41
4.3	Gerador de malha não-regular . . . . .	42
4.4	Convenção positiva dos sinais para especificar as condições de fronteira . . . . .	47
4.5	Mapeamento das parcelas da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ . . . . .	48
4.6	Polinómios de Chebyshev de grau 0 a 5 . . . . .	48
4.7	Mapeamento das parcelas da matriz de fronteira $\mathbf{B}$ . . . . .	49
4.8	Vetorialização das matrizes de rigidez $\mathbf{K}$ . . . . .	51
5.1	Viga de Timoshenko . . . . .	57
5.2	Viga de Timoshenko: Deformação da viga em $X = L$ . . . . .	59
5.3	Viga de Timoshenko: Malhas utilizadas no programa de EFHT . . . . .	59
5.4	Viga de Timoshenko: Erro da energia de deformação em função do número total de graus de liberdade . . . . .	60
5.5	Viga de Timoshenko: Malhas utilizadas no programa SAP2000 . . . . .	61
5.6	Viga de Timoshenko: Pontos onde se comparam os campos de tensão e deslocamento . . . . .	62
5.7	Viga de Timoshenko: Campos $\sigma_x$ , $\tau_{xy}$ , $u_x$ e $u_y$ . Comparação de resultados entre os EFHT e os elementos finitos convencionais . . . . .	62
5.8	Viga de Timoshenko: Campos de tensão obtidos com EFHT . . . . .	64
5.9	Viga de Timoshenko: Campos de tensão obtidos com elementos finitos convencionais . . . . .	64

5.10	Viga de Timoshenko: Campos de deslocamento obtidos com EFHT . . . . .	66
5.11	Viga de Timoshenko: Campos de deslocamento obtidos com elementos finitos convencionais . . . . .	66
5.12	Placa em 'L' . . . . .	67
5.13	Placa em 'L': Malhas utilizadas no programa de EFHT . . . . .	68
5.14	Placa em 'L': Erro da energia de deformação em função do número total de graus de liberdade . . . . .	68
5.15	Placa em 'L': Campos de tensão . . . . .	70
5.16	Placa em 'L': Campos de deslocamento . . . . .	71
5.17	Painel de Cook . . . . .	73
5.18	Painel de Cook: Malhas utilizadas no programa de EFHT . . . . .	73
5.19	Painel de Cook: Erro da tensão máxima no ponto $B$ em função do número total de graus de liberdade . . . . .	74
5.20	Painel de Cook: Erro do deslocamento vertical no ponto $A$ em função do número total de graus de liberdade . . . . .	75
5.21	Painel de Cook: Campos de tensão . . . . .	76
5.22	Painel de Cook: Campos de deslocamento . . . . .	77
5.23	Placa com orifício circular . . . . .	78
5.24	Placa com orifício circular: Malhas utilizadas no programa de EFHT . . . . .	79
5.25	Placa com orifício circular: Energia de deformação em função do número total de graus de liberdade . . . . .	80
5.26	Placa com orifício circular: Campos de tensão . . . . .	81
5.27	Placa com orifício circular: Campos de deslocamento . . . . .	82
C.1	Transformação do referencial da fronteira $s$ para o referencial local polar $(r, \theta)$ . . .	100
C.2	Transformação do referencial local polar $(r, \theta)$ para o referencial normal-tangencial à fronteira $(n, t)$ . . . . .	101
C.3	Transformação do referencial local Cartesiano $(x, y)$ para o referencial local polar $(r, \theta)$	101
C.4	Convenção de sinais positivos para as forças aplicadas . . . . .	103
C.5	Convenção de sinais positivos para os deslocamentos aplicados . . . . .	104
D.1	Modelo em estudo . . . . .	106
D.2	Discretização do modelo em estudo . . . . .	108
D.3	Modelo composto por quatro elementos com a convenção de sinais positiva definida pelo programa . . . . .	110
D.4	Representação gráfica dos resultados obtidos pelo programa de EFHT . . . . .	116

# Lista de tabelas

1.1	Diferenças dos elementos finitos convencionais e híbridos-Trefftz desenvolvidos . .	5
4.1	Dados topológicos da malha . . . . .	42
4.2	Estrutura de dados <b>Edges</b> . . . . .	43
4.3	Estrutura de dados <b>Loops</b> . . . . .	45
4.4	Estrutura de dados <b>BConds</b> . . . . .	46
5.1	Viga de Timoshenko: Refinamentos ' $p$ ' utilizados . . . . .	60
5.2	Viga de Timoshenko: Comparação entre os valores exatos dos campos de tensão e deslocamento e os obtidos para os modelos mais refinados no programa de EFHT e no programa SAP2000 . . . . .	63
D.1	Números de indeterminação estática e cinemática ao nível de cada elemento e ao nível estrutural . . . . .	107



# Lista de símbolos

## Símbolos gerais

$\emptyset$ : Conjunto vazio

$\cup$ : União de conjuntos

$\cap$ : Intersecção de conjuntos

$V$ : Área do plano mediano de um corpo

$\Gamma_\Omega$ : Fronteira exterior do domínio

$\Gamma_u$ : Fronteira de Dirichlet

$\Gamma_\sigma$ : Fronteira de Neumann

$\Gamma_e$ : Fronteira essencial

$\Gamma_n$ : Fronteira natural

$ds, dx, dy$ : Comprimento de um elemento diferencial de fronteira e as suas componentes nos eixos de um referencial Cartesiano

$L, \Delta x, \Delta y$ : Comprimento da fronteira de um elemento genérico e as respetivas componentes nos eixos de um referencial Cartesiano

$\alpha$ : Valor da indeterminação estática

$\beta$ : Valor da indeterminação cinemática

$U$ : Energia de deformação

$E_\diamond$ : Erro relativo de  $\diamond$

$\diamond^e$ :  $\diamond$  do elemento finito

$\diamond^T$ :  $\diamond$  transposto

$d\diamond$ : Diferencial de  $\diamond$

$\phi_h, \phi_b$ : Função potencial harmónica/ bi-harmónica

$Z_m$ : Polinómios de Chebyshev de grau  $m$

$N_D$ : Número total de funções de aproximação incluídas na base do domínio

$n_D$ : Ordem das funções de aproximação incluídas na base do domínio

$N_\Gamma$ : Número total de polinómios incluídos na base da fronteira essencial

$n_\Gamma$ : Grau dos polinómios incluídos na base da fronteira essencial

$W_i$ : Funções de peso

$a_i$ : Coeficientes das funções de aproximação

$R$ : Resíduo

## Operadores

$\mathcal{L}$  : Operador diferencial genérico

$\mathbf{D}$ : Operador diferencial de equilíbrio

$\mathbf{D}^*$ : Operador diferencial de compatibilidade

$\nabla$ : Operador gradiente

$\nabla^2$ : Operador Laplaciano

$\nabla^T$ : Operador divergência

$\tilde{\nabla}$ : Operador rotacional

## Matrizes e vetores

$\mathbf{u}$ : Campo de deslocamentos

$\boldsymbol{\varepsilon}$ : Campo de deformações

$\boldsymbol{\sigma}$ : Campo de tensões

$\mathbf{t}$ : Forças aproximadas nas fronteiras essenciais

$\mathbf{u}_\Gamma$ : Deslocamento imposto na fronteira de Dirichlet de um corpo

$\mathbf{t}_\Gamma$ : Força exterior aplicada na fronteira de Neumann de um corpo

$\Psi_h, \Psi_b, \Psi_r$ : Bases de aproximação de deslocamentos

$\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_b$ : Bases de aproximação das deformações



$\mathbf{S}_h, \mathbf{S}_b$ : Bases de aproximação das tensões

$\mathbf{Z}$ : Base polinomial de aproximação das forças na fronteira essencial

$\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_r$ : Deslocamentos generalizados

$\mathbf{p}$ : Forças generalizadas

$\mathbf{k}$ : Matriz de rigidez do material

$\mathbf{K}$ : Matriz de rigidez do elemento finito

$\mathbf{B}$ : Matriz de fronteira

$\bar{\mathbf{t}}_r$ : Vetor das forças aplicadas na fronteira de Neumann do elemento finito

$\bar{\mathbf{u}}_r$ : Vetor dos deslocamentos impostos na fronteira de Dirichlet do elemento finito

$\mathbf{n}$ : Normal unitária

## Características do material

$E$ : Módulo de Young

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

$G$ : Módulo de distorção

$I$ : Momento de inércia



# Lista de abreviaturas e siglas

**EDP** Estado de deformação plana

**EFHT** Elementos finitos híbridos-Trefftz

**ETP** Estado de tensão plana

**LHS** Matriz dos coeficientes do sistema governativo (*Left-hand side*)

**MEF** Método dos elementos finitos

**NaN** *Not a number*

**NGP** Número de pontos de Gauss-Legendre

**NoDiv** Número de divisões para a representação gráfica da solução

**RBM** Modos de corpo rígido (*Rigid body mode*)

**RHS** Vetor livre do sistema governativo (*Right-hand side*)



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e objetivo

Ao longo da história, o ser humano confrontou-se com o desafio proveniente da necessidade de se abrigar e de vencer vãos para sobreviver e evoluir. As várias fases da humanidade condicionaram o processo de desenvolvimento de práticas de construção cada vez mais complexas, exigindo um nível de conhecimento cada vez mais aprofundado no ramo da Engenharia Civil.

Um dos principais objetivos da Engenharia Civil é melhorar e garantir a segurança das estruturas, de forma a reduzir, o mais baixo quanto razoavelmente atingível, o risco de rutura de uma dada estrutura. Torna-se então claro que o estudo de problemas estruturais tem um enorme relevo, e eleva-se a necessidade de conseguir prever, o mais realisticamente possível, o que na realidade acontece antes da construção da estrutura [1].

Inicialmente, as boas práticas de construção traduziam-se no processo de aprendizagem através da avaliação do bom desempenho de estruturas já existentes. Tomando como exemplo a estrutura contraventada da gaiola Pombalina, cujas semelhanças com estruturas já existentes datam a anos anteriores a 1755. Esta estrutura em madeira tem uma função anti-sísmica dispondo de uma maior capacidade de deformação, dissipação e resistência do que outras estruturas da época, pelo que se observaram menores danos sísmicos neste tipo de estruturas. Desta forma, a reconstrução da cidade de Lisboa após o terramoto teve como base o modelo adotado por este tipo de estruturas, com o principal objetivo de evitar uma onda de destruição dos edifícios semelhante à observada em 1755 [2, 3].

Já nos séculos XIX e XX, passou a ser geralmente aceite que se deveria construir segundo conclusões retiradas de modelos estruturais, que, numa primeira fase, assumiram a forma de maquetas. Exemplos desta situação são os famosos modelos desenvolvidos através da utilização do método indireto, um modelo qualitativo que permite a obtenção de reações de apoio e esforços internos, por A. Gaudi e F. Otto, que permitiu aos mesmos o desenvolvimento dos modelos físicos que estariam na base dos seus projetos de construção. Em relação a A. Gaudi, este desenvolveu bastantes projetos (como o da Cripta da Capela Güell) onde representava a estrutura em escala reduzida (1/10), através de modelos constituídos por cordas fixadas no teto e pesos colocados de forma a simular as cargas atuantes na estrutura. Através das curvas apresentadas pelas cordas,

segundo a analogia da teoria dos cabos e arcos, o arquiteto estabelecia uma definição qualitativa da solução estrutural mais eficiente para as cargas aplicadas. Para o desenvolvimento da estrutura, através de fotografias ou desenhos, invertia as imagens, obtendo, através das curvas dos cabos, os pilares e arcos detalhados no projeto [4]. Por seu lado, F. Otto realizava testes com bolhas de sabão, simulando a partir das mesmas o comportamento presente em estruturas tencionadas (membranas), em que através da geometria das bolhas conseguia aferir a localização das tensões mais elevadas [5].

Em Portugal, na década de 30 do século XX, dá-se nota de destaque na área do dimensionamento experimental através da análise de modelos reduzidos, ao trabalho de E. Cardoso. Através dos modelos construídos, media, com o auxílio de instrumentos ou métodos, alguns da sua autoria, os parâmetros necessários para a realização de uma análise comportamental das estruturas [6].

Em alternativa a estes modelos, o comportamento estrutural também era previsto utilizando modelos matemáticos simplificados, adequados às ferramentas de cálculo disponíveis na época.

Os primeiros modelos utilizados para a resolução prática de problemas relativamente complexos, foram desenvolvidos no final do século XIX e eram baseados na idealização da estrutura em pórticos, que, pela sua simplicidade, podiam ser resolvidos analiticamente. Um exemplo dessa abordagem é o método de escoras e tirantes utilizado para o dimensionamento de armaduras resistentes em vigas de betão armado. O método da ‘analogia de treliça’, proposto por W. Ritter (1899) e E. Mörsch (1909), permite a representação dos campos de tensões através da substituição da estrutura real por um estrutura resistente na forma de treliça [7, 8].

Modelos matemáticos mais complexos de comportamento estrutural já estavam disponíveis na altura, principalmente baseados na Teoria da Elasticidade, mas a sua aplicação a situações complexas era impossibilitada pela incapacidade de determinar soluções analíticas para a vasta maioria das situações de interesse prático.

A Teoria da Elasticidade procura obter os estados de tensão, deformação e deslocamento para corpos elásticos atuados por cargas aplicadas e sujeitos a restrições de deslocamentos. Os fundamentos desta teoria foram desenvolvidos no século XIX por autores como A. Cauchy, que estabeleceu a equação de equilíbrio, S. Poisson, que definiu um coeficiente que permitia avaliar o comportamento dos materiais quando solicitados, e C. Navier, através da escrita do equilíbrio diferencial expresso em termos de deslocamento [9, 10]. No entanto, data-se aos séculos XVII e XVIII a apresentação de estudos físicos e matemáticos que estariam na base da Teoria da Elasticidade, por autores como R. Hooke, que propôs as bases da lei constitutiva dos materiais, e L. Euler, que, em conjunto com D. Bernoulli, desenvolveu a teoria de vigas previamente estudada por J. Bernoulli, conhecida hoje pelo desígnio de vigas Euler-Bernoulli [9]. No entanto, a aplicabilidade prática da Teoria da Elasticidade era bastante limitada à resolução de problemas simples, pois os mais complexos não tinham solução analítica.

Apenas na segunda metade do século XX apareceram os meios capazes de permitir a resolução dos problemas mais complexos, através do surgimento dos computadores e do desenvolvimento de métodos capazes de resolver aproximadamente as equações da Teoria da Elasticidade, como o método dos elementos finitos.

Atualmente, a elevada segurança existente nas estruturas baseia-se não só no conhecimento

adquirido por construções e modelos físicos já realizados, mas também na modelação computacional realizada pelos engenheiros. É através deste processo de modelação que se conseguem adquirir resultados substancialmente elucidativos em relação às consequências estruturais que certos fenómenos podem ter [1].

Neste trabalho desenvolve-se um programa computacional em ambiente MATLAB® para a resolução aproximada de problemas de elasticidade plana. O programa foi construído de raiz e utiliza a formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz, no seu modelo de deslocamentos, para aproximar a solução.

Os problemas estruturais envolvendo estruturas bidimensionais, conhecem uma importância significativa e transversal a várias áreas da engenharia, sendo fundamentais, na Engenharia Civil, por exemplo, para o dimensionamento de paredes portantes, túneis, barragens, aterros e cálculo dos estados de tensões em geomateriais.

O trabalho apresentado enquadra-se numa ferramenta computacional mais complexa, que resolve problemas de valores de fronteira elípticos, parabólicos e hiperbólicos utilizando elementos finitos híbridos, com aplicações a análises acústicas, térmicas e estruturais. Ao nível da utilização, a plataforma computacional é de simples utilização, expansível e estruturalmente unitária.

O objetivo final desta ferramenta é de construir uma primeira plataforma computacional baseada em elementos finitos híbridos disponibilizada abertamente à comunidade científica. De notar que, os elementos finitos híbridos não se encontram incluídos em programas de cálculo automático existentes, sejam comerciais ou *open-source*. Ainda de referir que o trabalho apresentado é a primeira aplicação estrutural a ser implementada nesta ferramenta computacional.

## 1.2 Elementos finitos

Os fenómenos físicos traduzidos por um grau de dificuldade bastante elevado podem ser simplificados através de idealizações, que permitam uma boa aproximação do comportamento observado. Através dessas idealizações, consegue-se expressar o fenómeno de forma matemática, tipicamente através de equações diferenciais. No entanto, para a vasta maioria das equações diferenciais de problemas de valores de fronteira, não é conhecida solução analítica, sendo por isso necessário recorrer a métodos numéricos de aproximação de forma a conseguir a sua resolução. Uma das metodologias mais utilizadas para o efeito é o método dos elementos finitos (MEF).

Qualquer formulação do método dos elementos finitos parte da divisão do domínio em pequenas partes (os elementos finitos). Os campos físicos correspondentes a estas partes passam a ser traduzidos através de uma combinação linear de funções, com um grau de complexidade inferior às que na realidade ocorrem (funções de aproximação). Assim, o fenómeno em questão, anteriormente descrito por campos de valor desconhecido numa infinidade de pontos, passa a ser descrito por um número finito de incógnitas, que são os pesos com os quais as funções de aproximação entram na solução. Estes pesos são determinados pela resolução de um sistema obtido pela imposição das equações governativas.

Os elementos conformes de deslocamento (convencionais), atualmente os mais utilizados em

programas de cálculo automático para a resolução de problemas de mecânica estrutural, apresentam estimativas com uma boa taxa de precisão para as soluções dos campos de deslocamentos, mas não necessariamente para os campos de tensões. Esta situação deve-se ao facto destes elementos aproximarem primariamente o campo dos deslocamentos no interior do elemento, e de utilizarem funções de aproximação que satisfazem as condições cinemáticas nos elementos e nas suas fronteiras interiores e exteriores. No entanto, os elementos finitos convencionais apresentam limitações significativas numa análise estrutural, ao não respeitarem as condições de equilíbrio no domínio e nas fronteiras dos elementos, apresentando, por isso, descontinuidades nos campos das tensões. Esta é uma limitação de cariz relevante no processo do dimensionamento estrutural, pois para este processo os campos de tensões têm, tipicamente, maior relevância do que os de deslocamentos.

As limitações inerentes à utilização de formulações baseadas neste tipo de elementos motivaram o desenvolvimento de outras formulações alternativas. Entre estas formulações, destacam-se aqui as formulações híbridas designadas como tal por aproximarem campos diferentes, nomeadamente, no domínio e fronteiras dos elementos. Das formulações híbridas desenvolvidas, distinguem-se três tipos, a híbrida-mista, a híbrida e a híbrida-Trefftz.

As formulações híbridas apresentam vantagens como a livre escolha do tipo, ordem e grau das funções de aproximação, refinamento independente entre elementos e fronteiras e um maior equilíbrio entre as estimativas das soluções estáticas e cinemáticas. Na tabela 1.1 apresenta-se de uma forma sistematizada uma comparação entre os elementos finitos convencionais e a formulação híbrida-Trefftz desenvolvida no presente trabalho, pela perspetiva do utilizador.

No presente trabalho, de todos os elementos finitos híbridos existentes, foram escolhidos os elementos híbridos-Trefftz, dado que estes possibilitam a utilização de elementos de grandes dimensões, uma vez que apresentam uma convergência superior, por serem construídos utilizando funções de aproximação que contêm informação fisicamente relevante, especificamente para cada problema que se está a resolver [11]. Para além disso, estes elementos concedem ainda uma grande flexibilidade na definição da geometria do modelo, dado que permitem a redução à fronteira da integração de todos os termos do sistema resolutivo.

### 1.3 Estado da arte

O desenvolvimento do método dos elementos finitos (MEF) e a sua abrangência no que respeita à área de resolução de problemas com aplicabilidade prática, estão intrinsecamente ligados à evolução da tecnologia computacional, nomeadamente à melhoria da capacidade de processamento e armazenamento de dados por parte dos computadores.

O conceito e a consequente formulação do MEF deram os primeiros passos numa era ainda prévia à era digital. Datam-se à década de 40 do século XX, as primeiras metodologias matemáticas que permitiram o desenvolvimento do método, nomeadamente, os primeiros processos de discretização de meios contínuos com elementos finitos triangulares, permitindo a resolução numérica de problemas variacionais genéricos, num trabalho de R. Courant (1943) [12]. Mais tarde,



**Tabela 1.1:** Diferenças dos elementos finitos convencionais e híbridos-Trefftz desenvolvidos.

<b>Elementos finitos convencionais</b>	<b>Elementos finitos híbridos-Trefftz</b>
Implementados em programas de cálculo automático comerciais.	Não existem em programas de cálculo automático comerciais.
Funções de aproximação definidas em função dos nós do modelo.	Funções de aproximação ‘desligadas’ dos nós do modelo. Escolha das funções livre.
Os pesos expressam quantidades físicas.	Os pesos não expressam quantidades físicas.
Pouco flexíveis, fácil utilização. Necessária a escolha da geometria da malha e do tipo de elementos.	Bastante flexíveis, difícil utilização pelo utilizador inexperiente. Necessária a escolha da geometria da malha, do tipo de elemento, e da base das funções de aproximação para o domínio e fronteiras essenciais de cada elemento.
Elementos localmente compatíveis.	Elementos nem localmente compatíveis nem localmente equilibrados.
Refinamento ‘ $p$ ’ obriga a recalcular todo o sistema resolutivo do elemento.	Refinamento ‘ $p$ ’ localizado sem perda de dados.
Assemblagem do sistema requer o somatório das matrizes de rigidez e vetores do sistema resolutivo.	Assemblagem do sistema não requer o somatório das matrizes e vetores do sistema resolutivo.
As aproximações dos campos de deslocamentos oferecem melhores estimativas que as aproximações aos campos de tensões.	Qualidade comparável das estimativas obtidas pelas aproximações aos campos de deslocamentos e tensões.

em 1959, J. Greenstadt [13], divide o domínio contínuo das funções de aproximação em subdomínios discretos e adjacentes, passando estas a pertencer a cada subdomínio, onde as respetivas soluções se compatibilizam entre si através da imposição de condições cinemáticas.

É necessário recuar a 1960 para apresentar a primeira referência explícita conhecida ao método, num trabalho de R. Clough [14], referente a um estudo de problemas de elasticidade plana. Neste trabalho, propõem-se as nomenclaturas mais tarde adotadas pelo MEF e os procedimentos necessários à sua implementação computacional que permitisse a resolução de problemas discretos.

Ainda sem o definitivo desígnio de elemento finito, os primeiros elementos descritos como tal foram da autoria de M. Turner et al. [15] em 1956, onde apresenta diferentes tipos de elementos, nomeadamente os de três e quatro nós.

Ainda no século XX mas na década de 50, numa abordagem mais direcionada à aplicabilidade do método em engenharia, é atribuída uma nota de destaque a J. Argyris, que em conjunto com o seu grupo de investigação, desenvolveu a conceptualização das matrizes de rigidez e flexibilidade com aplicação a problemas aeronáuticos [16]. Estes conceitos generalizaram-se posteriormente na metodologia seguida no MEF, transversal a diversas áreas da engenharia.

De destacar O. Zienkiewicz e Y. Cheung [17, 18] pelo seu importante contributo na projeção do MEF como um método geral e utilizável para os mais diversos ramos da engenharia. Para além dos referenciados, muitos outros investigadores conheceram o seu relevo nos avanços do MEF

através de obras científicas e partilha de conhecimento tal como, J. Synge [19], R. Taylor [20], B. Irons [21], F. de Veubeke [22] e R. Bank [23]. Em Portugal, destaca-se o trabalho desenvolvido por E. Oliveira, um dos primeiros investigadores portugueses responsáveis pela divulgação e desenvolvimento do MEF no país.

Desde o desenvolvimento conceptual à implementação computacional do método a uma escala abrangente a diferentes situações, criaram-se geradores automáticos de malha, que definem algoritmos que permitem a adaptação da formulação a domínios arbitrários, como o trabalho pioneiro de O. Zienkiewicz e D. Phillips [24] e ainda o trabalho do grupo de Análise de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico [25].

Os elementos aplicados no presente trabalho correspondem à formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz. Os fundamentos do método foram estabelecidos por E. Trefftz em 1926 [26], em alternativa ao método de W. Ritz, já conhecido na altura. O método de Trefftz consiste em determinar a solução de um problema definido por equações diferenciais com condições de fronteira utilizando funções de aproximação que satisfaçam *a priori* as equações governativas do problema, cujos fatores de participação na solução são determinados de maneira a satisfazer tão bem quanto possível as condições de fronteira. No entanto, a capacidade tecnológica da época impossibilitava a sua aplicação prática imediata.

As primeiras aplicações do método apenas remontam a 1973 [27], onde a sua utilização se restringia a zonas particulares do domínio do modelo, deixando o resto do domínio para ser analisado por elementos finitos convencionais. Assim surgiu em 1978, por autoria de J. Jirousek [28], a primeira apresentação de quatro formulações híbridas-Trefftz, com aplicabilidade incidente na resolução de problemas mecânicos. As formulações apresentadas por J. Jirousek diferiam na forma de aproximar os campos nos domínios e nas fronteiras dos elementos, bem como na forma como eram impostas as condições de continuidade nas fronteiras interelementares.

Estabelecidas as formulações híbridas-Trefftz por J. Jirousek, muitas foram as derivações sugeridas ao método, merecendo no entanto uma especial nota de destaque o trabalho de I. Herrera na década de 80 do século XX, que permitiu o impulsionamento da investigação ligada ao método de Trefftz. Do seu trabalho, destaca-se de uma série de artigos, um em que estabeleceu os fundamentos matemáticos para a construção de bases de Trefftz completas [29].

Anos mais tarde, em 1989, o método (denominado de indireto) da formulação híbrida-Trefftz conhece uma abordagem alternativa proposta por Y. Cheung [30], o método de Trefftz direto. Este método propõe a derivação da equação integral da fronteira através da imposição em forma fraca da equação diferencial governativa usando as bases completas de Trefftz como funções de ponderação, sendo que as bases de aproximação no domínio são construídas tipicamente utilizando bases polinomiais próprias aos elementos conformes de deslocamento [31, 32].

A maior propulsão no desenvolvimento da formulação híbrida-Trefftz remete-se às últimas três décadas, onde os esforços se direcionaram à resolução da equação de Laplace através deste tipo de elementos, como apresentado por A. Zielinski e O. Zienkiewicz na referência [33]. Para além destes, outros trabalhos de relevo científico foram igualmente apresentados por outros autores e para outros tipos de problemas, como os trabalhos de W. Jin et al. [32] e V. Leitão [34] para a aplicação de elementos finitos híbridos-Trefftz em problemas de elasticidade plana,

sendo que nesta área os grupos de investigação liderados por J. Jirousek e J. Freitas contribuíram bastante para o seu desenvolvimento.

O método indireto de Trefftz na formulação proposta por J. Jirousek baseia-se na utilização de aproximações convencionais nas fronteiras, onde os pesos das mesmas são os próprios deslocamentos nodais. Utilizando esta abordagem, o grupo de trabalho liderado por J. Jirousek apresenta nos seus artigos [35–38], elementos híbridos-Trefftz para problemas de flexão em lajes finas e espessas exibindo um comportamento ortotrópico. No entanto, outros autores também contribuíram na análise de lajes espessas como, por exemplo, R. Piltner [39], ou Q. Qin [40] através da aplicação da formulação híbrida-Trefftz para a análise de lajes com comportamento isotrópico em fundações elásticas. As formulações foram extendidas a problemas de encurvadura e pós-encurvadura de lajes espessas por Q. Qin [41]. Foram criados elementos para a análise de modelos tridimensionais de lajes por J. Petrolito [42] e aplicado o método de colocação de Trefftz a problemas de flexão em lajes por C. Fernandes e V. Leitão [43].

O método indireto de Trefftz desenvolvido por J. Freitas, o utilizado no presente trabalho, propõe a imposição fraca da continuidade nas fronteiras, onde os pesos das funções de aproximação passam a não ter significado físico. Assim, e sobre a matéria incidente no presente trabalho, os desenvolvimentos da formulação híbrida-Trefftz para problemas elastostáticos planos foram publicados pelo grupo de investigação liderado por J. Freitas, na segunda metade da década de 90. Assim, foram publicadas as formulações híbridas-Trefftz nos seus modelos duais de deslocamento em 1996 [44] e tensão em 1998 [45], bem como formuladas as devidas comparações para casos específicos e a sua respetiva implementação em [46, 47]. Foram ainda apresentadas as formulações tridimensionais elastostáticas [48] e elastoplásticas [49], bem como formulações elastodinâmicas em [50, 51].

Uma das características mais particulares da formulação híbrida-Trefftz é a sua capacidade de lidar com efeitos localizados (fendas e concentração de tensões, por exemplo) nos modelos em análise sem recorrer a refinamento localizado de malha, como é típico na formulação convencional, através da inclusão na base de aproximação de funções de enriquecimento especiais calibradas de maneira a recuperar estes efeitos. Apresentam-se nos trabalhos de J. Jirousek e do seu grupo de investigação exemplos de aplicação a problemas com concentração de tensões em aberturas circulares e elípticas, salientando ainda o trabalho desenvolvido por J. Freitas [52], C. Cismasiu [50] e R. Piltner [53] nesta área. De notar que as primeiras publicações alusivas ao tratamento de singularidades foram formuladas ainda antes da formulação híbrida-Trefftz deter o seu desígnio (era tratada na altura como os ‘super elementos híbridos’), e devem-se a P. Tong et al. [54] em 1973 e a K. Lin [55] em 1980. Estes ‘super elementos eram apenas aplicados em zonas da malha onde existissem singularidades, sendo utilizados na restante percentagem do domínio elementos convencionais.

Aplicações mais recentes do MEF na sua formulação híbrida foram publicadas na última década. Dos trabalhos, destacam-se a aplicação dos elementos finitos híbridos-Trefftz no seu modelo de deslocamento para análises espectrais elastodinâmicas para meios porosos saturados em [56], bem como o desenvolvimento de procedimentos de refinamento ‘ $p$ ’-adaptativo para soluções que utilizam elementos finitos híbridos-Trefftz na referência [57, 58] (modelo de deslocamento).

Destaque ainda para a aplicação da formulação híbrida-Trefftz no seu modelo de tensão para problemas elastostáticos bifásicos na referência [59] e ainda a aplicação de elementos de tensão híbridos e híbridos-mistos para meios bifásicos na referência [60].

### 1.4 Organização do trabalho

O texto apresentado neste trabalho é dividido em seis capítulos e quatro anexos.

No capítulo 2 é apresentado o tipo de problema que será analisado, juntamente com os conceitos teóricos que lhe são atribuídos. São apresentadas as hipóteses simplificativas adotadas e as equações governativas no domínio e na fronteira do corpo. É ainda apresentada a forma compacta das equações no domínio. No final, são apresentados exemplos de aplicação com e sem solução analítica, necessitando estes últimos de se resolverem através da aplicação de métodos aproximados, como é o caso do MEF.

No capítulo 3 faz-se referência à formulação empregue pelos elementos finitos conformes de deslocamento e as suas lacunas, que podem ser colmatadas através da utilização dos elementos híbridos. Introduzem-se as aproximações no domínio e nas fronteiras próprias à formulação híbrida dos elementos finitos, sendo ainda apresentado o sistema governativo. Apresenta-se a condição de Trefftz e são desenvolvidas as funções pertencentes à base do domínio, específicas aos elementos híbridos-Trefftz. Por fim definem-se os conceitos de indeterminação estática e cinemática do problema analisado.

No capítulo 4 apresenta-se a metodologia utilizada na implementação computacional da formulação desenvolvida para elementos finitos híbridos-Trefftz para problemas de elasticidade plana. São apresentados os sistemas de referência utilizados tanto para a introdução dos dados por parte do utilizador, como para o processo de determinação da solução e posterior representação gráfica dos campos da mesma. São apresentadas as fases da completa utilização do programa. Listam-se as estruturas de dados que o programa utiliza, a alocação de memória do sistema resolutivo, o processo de integração numérica, a verificação da indeterminação cinemática e ainda o procedimento seguido pelo programa para resolver o sistema resolutivo. Por fim, apresenta-se a forma como o programa constrói a solução para a representação gráfica dos campos e como determina energia de deformação do sistema.

No capítulo 5, apresenta-se o processo de validação e análise do desempenho dos elementos híbridos-Trefftz, através de processos de convergência e análise de erro, comparando os resultados obtidos através do programa aqui desenvolvido com soluções analíticas conhecidas, resultados já publicados noutras obras científicas e ainda com programas de cálculo automático que seguem a metodologia dos elementos conformes de deslocamento.

No capítulo 6, são expostas as conclusões e ideias para trabalhos futuros.

Apresentam-se ainda quatro anexos que expressam informação auxiliar para a leitura do texto, com exemplos práticos para uma melhor compreensão do descrito no trabalho. No anexo A apresenta-se o método dos resíduos pesados. No anexo B descrevem-se todas as funções do programa desenvolvido. No anexo C apresenta-se a compatibilização dos sistemas de referência. No anexo D é apresentado um exemplo prático de aplicação do programa.

## Capítulo 2

# Apresentação do problema

### 2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é o de definir o problema de um corpo elástico atuado por um conjunto de forças aplicadas a uma parte da sua superfície e sujeito a deslocamentos impostos na parte restante da mesma.

Na primeira parte do capítulo, apresentam-se as hipóteses simplificativas do problema e introduzem-se as equações governativas no domínio e na fronteira do corpo.

No domínio, devem ser satisfeitas as equações de equilíbrio, compatibilidade e as relações constitutivas. As equações de equilíbrio refletem o equilíbrio de um elemento diferencial do corpo sob a ação das tensões que lhe são aplicadas e são explicitamente deduzidas. Relativamente às condições de compatibilidade, apresentam-se os tipos de deformações que ocorrem no corpo, definindo-as através de derivadas parciais dos campos de deslocamentos. Apresenta-se ainda a relação linear entre as tensões e as deformações através da lei de Hooke, tanto para os estados de tensão plana como para os estados de deformação plana, referindo as diferenças entre os dois tipos de formulação e apresentando exemplos práticos.

De seguida, deriva-se a forma compacta das equações no domínio, a equação de Navier.

Relativamente às condições impostas na superfície do corpo (condições de fronteira), apresentam-se as equações que definem o equilíbrio entre as forças aplicadas e as tensões na fronteira de Neumann do corpo, bem como a expressão que assegura a imposição dos deslocamentos nas fronteiras de Dirichlet.

No final do capítulo são apresentados exemplos ilustrativos de problemas com e sem solução analítica, sendo ainda explicada a necessidade de se determinarem soluções aproximadas.

### 2.2 Hipóteses simplificativas do problema

As hipóteses simplificativas tomadas como válidas no desenvolvimento do trabalho são as seguintes,

- O comportamento dos materiais constituintes do corpo é elástico linear (linearidade física),

sendo linear a relação constitutiva (relação entre as tensões e as deformações), ou seja, retiradas as solicitações o corpo volta à sua forma inicial.

- O material é homogêneo e uniforme, ou seja, as propriedades do material são idênticas em todos os pontos do corpo.
- O material do corpo é isotrópico, ou seja, exibe as mesmas propriedades elásticas em qualquer direção.
- É válida a hipótese dos pequenos deslocamentos, ou seja, os deslocamentos e as deformações são considerados pequenos em comparação com as dimensões da estrutura (linearidade geométrica). Por consequência, considera-se aceitável escrever as equações governativas na forma indeformada do corpo.

De notar que, para além das hipóteses em cima referidas, que são bastante transversais a toda a Teoria da Elasticidade, são ainda adotadas no trabalho, por opção, as seguintes hipóteses, com o objetivo de simplificar a formulação dos elementos finitos apresentados,

- No meio analisado, existe uma direção na qual todas as tensões são nulas (estado de tensão plana (ETP)) ou todas as deformações são nulas (estado de deformação plana (EDP)).
- Não existem forças volúmicas aplicadas, e considera-se desprezável o peso próprio do corpo.

## 2.3 Equações governativas

O problema de elasticidade plana que se propõe resolver neste trabalho, pressupõe a determinação dos campos de deslocamentos, deformações e tensões distribuídos num meio contínuo, conhecidos os deslocamentos impostos e as forças exteriores aplicadas na superfície do mesmo. Para a sua resolução, torna-se então necessário definir as equações que governam o problema, tanto no domínio como na fronteira.

As equações no domínio expressam o equilíbrio de um elemento diferencial do meio, a relação entre os deslocamentos e as deformações e a relação de proporcionalidade entre os estados de tensão e de deformação do corpo.

Por outro lado, as condições de fronteira descrevem os efeitos das forças exteriores aplicadas e dos deslocamentos impostos ao corpo.

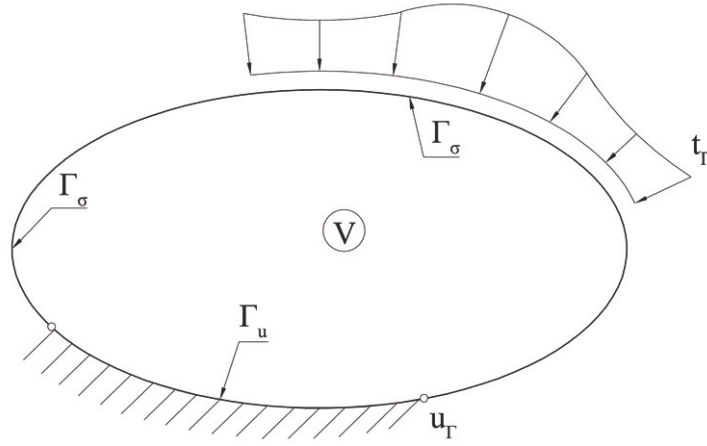
Nas secções seguintes, descrevem-se de forma detalhada cada uma das equações e condições anteriormente apresentadas.

### 2.3.1 Equações no domínio

Na figura 2.1 representa-se um corpo de área  $V$  e de superfície  $\Gamma_\Omega$ , sendo esta definida pelas parcelas de Dirichlet ( $\Gamma_u$ ), onde os deslocamentos são conhecidos, e/ou de Neumann ( $\Gamma_\sigma$ ), onde as forças aplicadas são conhecidas. Estas parcelas são complementares, uma vez que a imposição de

cargas e deslocamentos em simultâneo traduz uma ação fisicamente impossível. Assim, a união das duas parcelas expressa a superfície total,  $\Gamma_\Omega$ , tal que,  $\Gamma_\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ .

Considerando agora o corpo apresentado na figura 2.1 sujeito a um campo de forças  $\mathbf{t}_\Gamma^T = \{t_{\Gamma_x} t_{\Gamma_y}\}$  e de deslocamentos  $\mathbf{u}_\Gamma^T = \{u_{\Gamma_x} u_{\Gamma_y}\}$ , onde os índices  $x$  e  $y$  denotam as componentes desses campos no referencial Cartesiano. A aplicação destes campos desenvolve no meio um estado de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ , traduzido pelo vetor  $\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}\}$ , um estado de deformação  $\boldsymbol{\epsilon}$ , traduzido pelo vetor  $\boldsymbol{\epsilon}^T = \{\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy}\}$ , e um campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , traduzido pelo vetor  $\mathbf{u}^T = \{u_x u_y\}$ .



**Figura 2.1:** Domínio do corpo ( $V$ ), fronteiras de Neumann ( $\Gamma_\sigma$ ) e Dirichlet ( $\Gamma_u$ ).

### Condição de equilíbrio

A condição de equilíbrio traduz o equilíbrio de um elemento diferencial pertencente ao meio sob o efeito das tensões nele atuantes.

Na figura 2.2 está representado um elemento diferencial de lados  $dx$  e  $dy$ , pertencente ao meio, sujeito a um estado de tensão representado pelas componentes das tensões nas diferentes arestas do corpo (os seus sentidos convencionalmente positivos são os utilizados na figura).

Nas facetas 1 e 2 do elemento diferencial atuam as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , assumidas constantes nas respetivas facetas. As facetas 3 e 4 do corpo são atuadas pelas mesmas tensões, acrescidas pelos seus diferenciais  $d\sigma_x$ ,  $d\sigma_y$  e  $d\tau_{xy}$ , derivados da variação dos campos de tensões sentida pelo corpo, entre as facetas opostas. Para o elemento diferencial atuado pelas tensões apresentadas estar em equilíbrio, a resultante das respetivas deve ser nula [61–63].

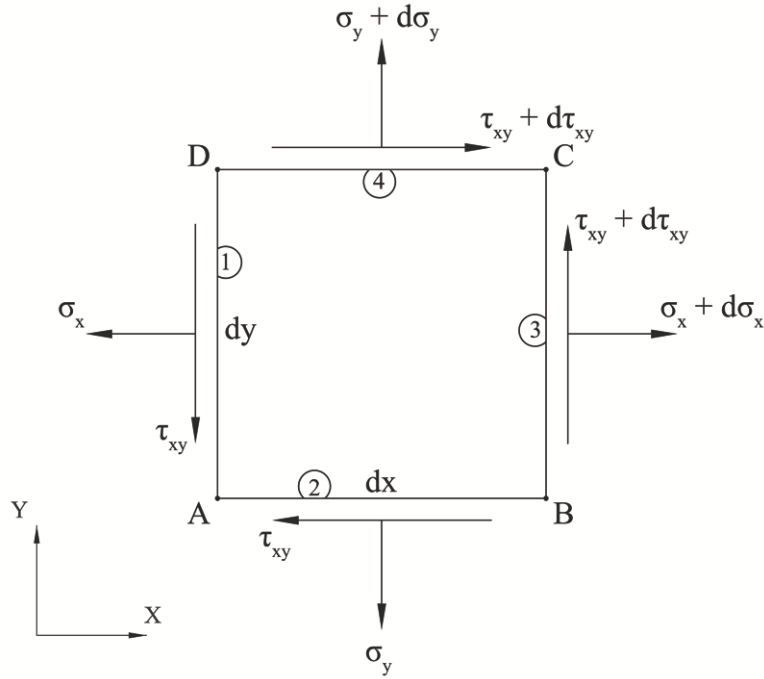
Desta forma, o equilíbrio de forças na direção  $x$  é descrito por,

$$\sum f_x = 0,$$

$$-(\sigma_x) dy + (\sigma_x) dy + (d\sigma_x) dy - (\tau_{xy}) dx + (\tau_{xy}) dx + (d\tau_{xy}) dx = 0 \quad (2.1)$$

Eliminando os termos iguais e de sinal contrário, obtém-se,

$$(d\sigma_x) dy + (d\tau_{xy}) dx = 0 \quad (2.2)$$



**Figura 2.2:** Elemento diferencial sujeito a um estado de tensão. Adaptado de [61].

O diferencial da tensão  $\sigma_x$  fica traduzido por,

$$d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \quad (2.3)$$

da mesma forma que  $d\tau_{xy}$  é expresso por,

$$d\tau_{xy} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \quad (2.4)$$

Então substituindo as definições (2.3) e (2.4) na equação (2.2), obtém-se,

$$\left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx = 0 \quad (2.5)$$

Dividindo nos dois lados da equação (2.5) por  $dx dy$ , estabelece-se a equação de equilíbrio na direção  $x$ ,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Estabelecendo, de forma análoga, o equilíbrio de forças na direção  $y$ , a equação de equilíbrio traduz-se por,

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

Admitindo que o meio não está sujeito a forças de massa, o sistema de equações diferenciais (2.8) deve ser respeitado em todos os pontos do mesmo,

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$



Escrevendo as equações de equilíbrio (2.8) na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

e definindo o operador diferencial de equilíbrio  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$ , obtém-se a forma compacta do sistema (2.8),

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

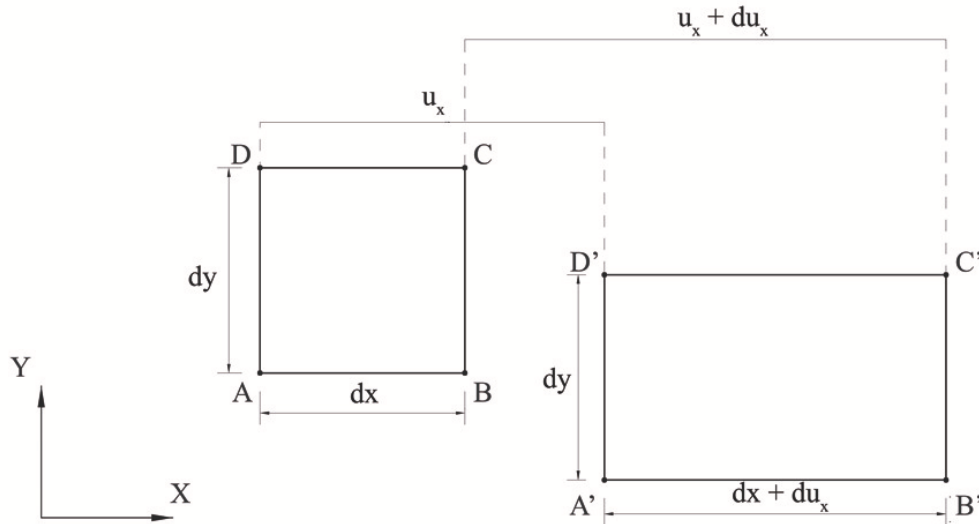
### Condição de compatibilidade

A deformação é uma medida da alteração da geometria inicial de um corpo, quando este é sujeito a forças externas ou deslocamentos impostos.

Esta alteração de geometria pode ocorrer de duas maneiras, que em geral coexistem, nomeadamente, a alteração das dimensões das arestas e a variação dos ângulos entre as mesmas.

Diz-se que um corpo sofre uma deformação compatível, quando, depois da deformação, o corpo não apresenta descontinuidades [62].

Partindo desta definição, apresentam-se as figuras 2.3 e 2.4, ilustrativas dos dois tipos de alteração da geometria inicial de um elemento diferencial.



**Figura 2.3:** Deformação normal  $\epsilon_x$  de um elemento diferencial. Adaptado de [62].

Na situação representada na figura 2.3, o corpo altera a sua geometria inicial variando o comprimento das suas arestas, sem que o ângulo entre as mesmas se altere. A alteração geométrica é, portanto, consequência da diferença entre os deslocamentos dos vértices do elemento diferencial, neste caso, na direção  $x$ .

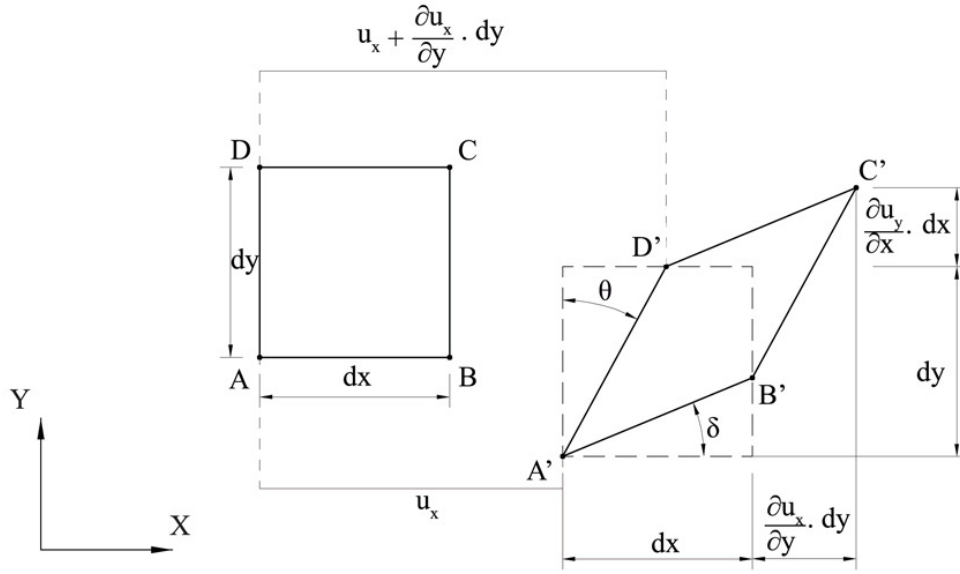
A deformação normal  $\varepsilon_x$  define-se como sendo o alongamento  $du_x$ , dividido pelo comprimento inicial do segmento,  $dx$ ,

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} dx}{dx} \Leftrightarrow \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.11)$$

De forma análoga, na direção  $y$ , a deformação normal,  $\varepsilon_y$ , é expressa por,

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.12)$$

As deformações nominais  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  são também denominadas de extensões.



**Figura 2.4:** Distorção  $\gamma_{xy}$  de um elemento diferencial. Adaptado de [62].

A figura 2.4 apresenta uma situação em que a deformação ocorre através da alteração dos ângulos das arestas do elemento diferencial, enquanto que o comprimento das mesmas permanece inalterado. Esta alteração do ângulo entre os segmentos  $dx$  e  $dy$  inicialmente ortogonais, denomina-se distorção  $\gamma_{xy}$  [10].

Partindo da figura 2.4, pretende-se quantificar a distorção dos segmentos constituintes do elemento.

Tomando como referência o ponto  $A$ , que sofreu um deslocamento  $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ , observa-se a distorção  $\theta$  (entre as direções  $AD$  e  $A'D'$ ). Assim o ponto  $D'$  sofreu, para além do deslocamento  $u_x$ , um acréscimo de deslocamento  $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ , tendo um deslocamento total de  $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ , na direção  $x$ .

O acréscimo de deslocamento  $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$  provoca uma variação do ângulo inicial calculável pela hipótese dos pequenos deslocamentos (linearidade geométrica), pela expressão,

$$\theta = \frac{1}{dy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (2.13)$$

De forma análoga, na direção  $y$ , o ângulo  $\delta$  é expresso por,

$$\delta = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.14)$$

Observando que a variação total do ângulo é a soma das equações (2.13) e (2.14), obtém-se,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.15)$$

Assim, as equações que traduzem as componentes normais (extensões) e tangenciais (distorções), do vetor das deformações são,

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{cases} \quad (2.16)$$

As equações (2.16) são designadas aqui por condições de compatibilidade. Estas condições podem ser escritas de forma compacta como,

$$\mathbf{D}^* \mathbf{u} = \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{D}^*$  representa o operador diferencial de compatibilidade, que em coordenadas Cartesianas é o transposto do operador diferencial de equilíbrio.

### Condição de elasticidade

Quando submetidos a solicitações exteriores, os corpos deformam-se e deslocam-se.

A equação de elasticidade traduz a lei constitutiva do material, que implica a existência de uma relação biunívoca entre as tensões e as deformações, independente do tempo, e válida para todos os pontos no domínio [10, 62].

A lei constitutiva baseia-se em modelos de comportamento para quantificar essa relação, sendo o mais antigo, o modelo experimental realizado e definido por R. Hooke (1678) [62].

Este modelo foi generalizado posteriormente, dando origem à lei de Hooke generalizada [10, 61–63], que permite estabelecer uma relação entre as tensões e as deformações que ocorrem no corpo através de relações constitutivas do tipo (2.18) [62].

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{k}$  é a matriz de rigidez do material.

Tal como referido anteriormente, as equações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade no domínio são apresentadas neste trabalho recorrendo à Teoria da Elasticidade na sua formulação bidimensional com os corpos sujeitos a estados de tensão plana ou estados de deformação plana, dependendo do tipo de carregamento e do tipo de geometria do próprio corpo.

Estes estados planos de tensão e de deformação são idealizações da realidade, isto é, perante uma situação física, aplica-se uma aproximação da mesma para efeitos de modelação, utilizando o modelo que mais se assemelhe e melhor se aplique a essa situação. O critério preponderante da escolha do modelo a utilizar, recai na existência de tensões ou deformações nulas num determinado plano.

Pode-se assumir que um corpo se encontra em estado de tensão plana quando as tensões se perspetivam uniformes ao longo da espessura do corpo, sendo nulas todas as tensões normais ao plano mediano do mesmo,  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Por consequência, a direção perpendicular ao plano é uma direção principal, sendo  $\sigma_z$  uma tensão principal.

Tipicamente, estas situações são encontradas em corpos com uma das suas dimensões (espessura) significativamente inferior às restantes. Exemplos dessas situações são uma placa ou uma parede resistente, solicitadas principalmente nos seus planos, desprezando-se as forças aplicadas perpendicularmente aos mesmos [64, 65].

Neste caso, a matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  para o estado de tensão plana define-se como,

$$\mathbf{k} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $E$  e  $\nu$  representam o módulo de elasticidade (relação entre a tensão e a extensão na sua direção em estados de tensão uniaxiais) e o coeficiente de Poisson (relação entre a extensão transversal e a extensão longitudinal), respetivamente [62].

O estado de deformação plana ocorre quando todas as deformações numa direção são desprezáveis. As hipóteses simplificativas afetas a este modelo são,  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Por consequência, a direção perpendicular ao plano é uma direção principal, sendo  $\varepsilon_z$  uma extensão principal.

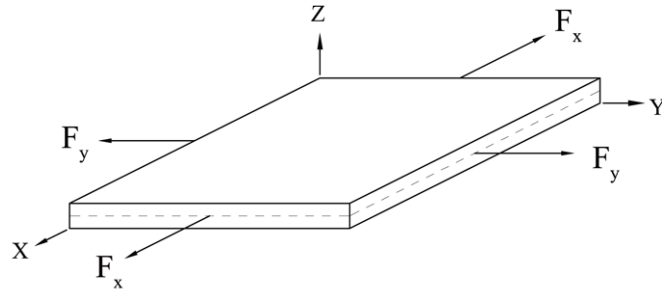
Na prática, esta situação acontece frequentemente em corpos que detenham uma dimensão bastante superior às restantes. Exemplos típicos, são os túneis e as barragens maciças (de betão ou de enrocamento). Nos túneis, o atrito com o solo é de tal ordem elevado que impede, nas secções situadas suficientemente longe das pontas, que o túnel se deforme longitudinalmente. Já no exemplo das barragens, estas estão tipicamente confinadas entre os dois maciços de solo adjacentes, não permitindo também significativa deformação longitudinal [64, 65].

A matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  para o estado de deformação plana define-se como,

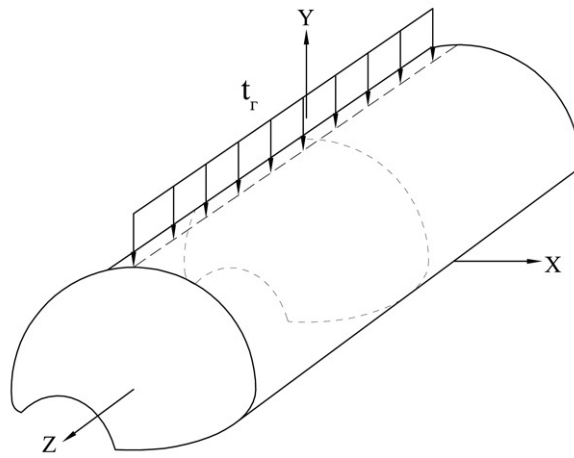
$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - \nu^2)} \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Do ponto de vista computacional, as definições (2.19) e (2.20) são tratadas na secção 3.3.6 de forma unificada, fazendo apenas as distinções entre os coeficientes  $k_{11}$ ,  $k_{12}$  e  $k_{33}$  da matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  do material. De referir que os índices dos coeficientes  $k_{ij}$  denotam as suas posições na matriz de rigidez.

De seguida, apresentam-se duas situações ilustrativas do estado de tensão plana (figura 2.5) e do estado de deformação plana (figura 2.6).



**Figura 2.5:** Exemplo de uma situação que induz um estado de tensão plana. Adaptado de [64].



**Figura 2.6:** Exemplo de uma situação que induz um estado de deformação plana. Adaptado de [64].

### Equação de Navier

Tomando partido das equações diferenciais de equilíbrio (2.10), das equações diferenciais que definem as deformações (2.17) e da equação que relaciona as tensões com as deformações (2.18), é possível substituir na equação da elasticidade a condição de compatibilidade, obtendo,

$$\sigma = \mathbf{kD}^* \mathbf{u} \quad (2.21)$$

Por fim, substituindo a condição de equilíbrio (2.10) na equação (2.21), obtém-se a equação diferencial de equilíbrio escrita apenas em deslocamentos, denominada de equação de Navier,

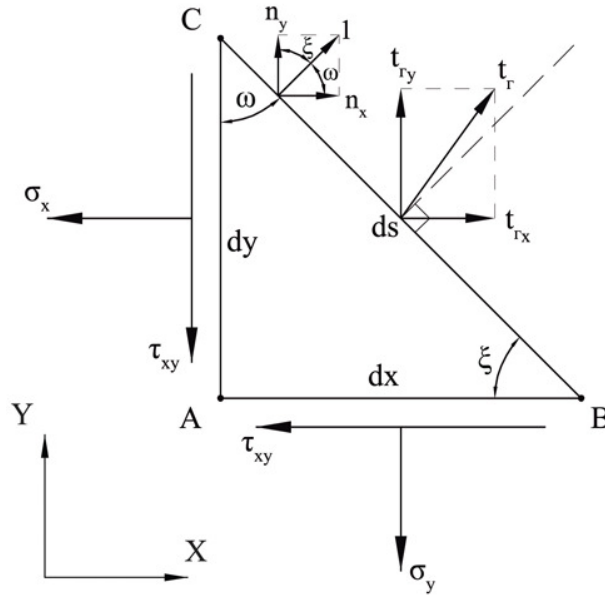
$$\mathbf{D}(\mathbf{kD}^* \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

### 2.3.2 Condições de fronteira

#### Fronteira de Neumann

As condições de fronteira de Neumann expressam o equilíbrio de um elemento diferencial do corpo na vizinhança da fronteira sob a influência das forças exteriores aplicadas ao mesmo, e das tensões interiores que equilibram essas forças.

Para ilustrar esta situação, considera-se agora o elemento diferencial apresentado na figura 2.7, atuado pela força exterior distribuída  $\mathbf{t}_\Gamma^T = \{t_{\Gamma_x} \ t_{\Gamma_y}\}$  na fronteira  $BC$ .



**Figura 2.7:** Superfície do meio atuada por forças externas. Adaptado de [62].

Considerando-se conhecidas as componentes  $n_x$  e  $n_y$  da normal unitária  $\mathbf{n}^T = (n_x \ n_y)$  à fronteira  $BC$ , tal como as componentes  $t_{\Gamma_x}$  e  $t_{\Gamma_y}$  da força (distribuída) atuante  $\mathbf{t}_\Gamma^T = (t_{\Gamma_x} \ t_{\Gamma_y})$ , expressas por,

$$\begin{cases} t_{\Gamma_x} = t_\Gamma \cos \omega \\ t_{\Gamma_y} = t_\Gamma \cos \xi \end{cases} \quad (2.23)$$

onde  $t_\Gamma$  é o módulo da força atuante  $\mathbf{t}_\Gamma$ .

O equilíbrio do elemento diferencial atuado por forças externas e tensões internas requer que a resultante das mesmas seja nula. Então, o equilíbrio de forças na direção  $x$  pode ser escrito por,

$$\sum f_x = 0, \quad -\sigma_x dy - \tau_{xy} dx + t_{\Gamma_x} ds = 0 \quad (2.24)$$

onde  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  representa o comprimento do segmento da superfície (fronteira) do elemento diferencial. Portanto, dividindo todos os termos por  $ds$ , obtém-se,

$$\sigma_x \frac{dy}{ds} + \tau_{xy} \frac{dx}{ds} = t_{\Gamma_x} \quad (2.25)$$

Partindo da equação (2.25) e observando que  $n_x = \frac{dy}{ds}$  e  $n_y = \frac{dx}{ds}$ , a condição de fronteira de Neumann pode ser escrita por,

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = t_{\Gamma_x} \\ \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x = t_{\Gamma_y} \end{cases} \quad (2.26)$$

sendo a segunda equação do sistema (2.26) obtida de forma análoga, mas para a direção  $y$ .

A condição de fronteira de Neumann pode ser escrita de forma compacta como,

$$\mathbf{t}_{\Gamma} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.27)$$

onde  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix}$ .

### Fronteira de Dirichlet

A condição de compatibilidade na fronteira de Dirichlet assegura que os deslocamentos impostos pelo meio exterior são recuperados pelo campo de deslocamentos que ocorre no corpo de área  $V$ , ou seja,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Gamma} \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{u}_{\Gamma}$  é o vetor dos deslocamentos impostos,

$$\mathbf{u}_{\Gamma} = \begin{pmatrix} u_{\Gamma_x} \\ u_{\Gamma_y} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

### 2.3.3 Solução de um problema de elasticidade plana

As equações apresentadas nas secções 2.3.1 e 2.3.2 definem completamente o problema.

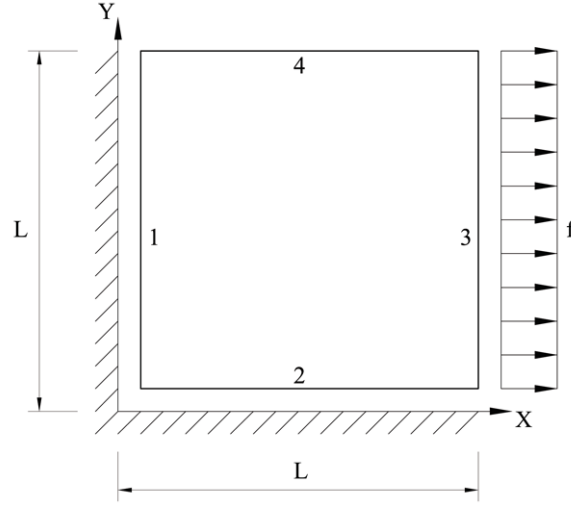
Para problemas simples, as soluções podem ser obtidas analiticamente. Por exemplo, considerando a situação representada na figura 2.8, onde  $f$  representa o valor de uma carga constante, distribuída na fronteira 3.

As arestas 1 e 2 (zona dos encastramentos deslizantes) são fronteiras de Dirichlet, na direção normal, e de Neumann, na direção tangencial, e as arestas 3 e 4 são fronteiras de Neumann nas duas direções. Dado que os apoios são definidos como encastramentos deslizantes e as forças aplicadas não têm componentes tangenciais, estes inviabilizam a existência de tensões tangenciais no modelo.

Por ser um exemplo simples, o problema pode ser resolvido integrando diretamente a equação de equilíbrio e obtendo as constantes referentes aos campos de tensões pelas condições de fronteira de Neumann.

Assim, sabendo que não existem tensões tangenciais,

$$\tau_{xy} = 0 \quad (2.30)$$



**Figura 2.8:** Meio atuado por uma força  $f$ .

Escrevendo a equação de equilíbrio (2.8), com as suposições descritas, tem-se que,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (2.31)$$

Tendo em conta a equação (2.31) e o facto de a força  $f$  ser constante, resulta que,  $\sigma_x$  é uma constante.

O valor da tensão  $\sigma_x$  obtém-se aplicando as condições de fronteira de Neumann (2.26). Então,

$$\sigma_x(L, y) = f \quad (2.32)$$

Logo, a tensão  $\sigma_x$  é igual à força distribuída na fronteira 3. Da mesma maneira, resulta que a tensão  $\sigma_y$  é nula em todos os pontos do meio.

Através da lei constitutiva da equação (2.18), a partir das tensões obtém-se as deformações,

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{cases} \quad \begin{matrix} \sigma_x = f \\ \sigma_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} f \\ \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} f \end{cases} \quad (2.33)$$

Uma vez integrado o campo das deformações, este traduz o campo de deslocamentos do corpo, expresso por,

$$\begin{cases} u_x = \int \frac{1}{E} f dx \\ u_y = -\int \frac{\nu}{E} f dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = \frac{f}{E} x + C_{u_x} \\ u_y = -\frac{\nu}{E} f y + C_{u_y} \end{cases} \quad (2.34)$$

As constantes de integração  $C_{u_x}$  e  $C_{u_y}$  determinam-se através das condições de fronteira de Dirichlet,

$$\begin{cases} u_x(0, y) = 0 \\ u_y(x, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{u_x} = 0 \\ C_{u_y} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$



Para este caso específico, através do procedimento apresentado, obtém-se o campo de tensões,

$$\sigma_x(x, y) = f \quad (2.36)$$

e o campo de deslocamentos,

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \frac{f}{E}x \\ u_y(x, y) = -\frac{\nu}{E}fy \end{cases} \quad (2.37)$$

Esta solução é a solução analítica do problema e permite saber os campos de tensões e deslocamentos exatos em qualquer ponto do meio.

É de grande importância salientar que apenas pequenas alterações nesta situação, como é o exemplo da carga atuada no corpo ser de distribuição linear, em vez de constante, dificultam de forma considerável a obtenção dos campos. Esta situação pode ser explicada pelo aparecimento de tensões tangenciais que eram nulas no exemplo da carga constante.

Fica portanto bastante comprometida a possibilidade de aplicar o método analítico para a resolução do problema, condicionando a abordagem e remetendo a sua resolução para a utilização de métodos numéricos aproximados para a obtenção desses mesmos campos de deslocamento, deformação e tensão.

Uma das técnicas mais conhecidas para a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais é o método dos elementos finitos. A sua formulação será definida no capítulo seguinte.



## Capítulo 3

# Elementos finitos híbridos-Trefftz

### 3.1 Introdução

Conforme apresentado na secção 2.3.3, os problemas planos de interesse prático, não têm, em geral, solução analítica conhecida tornando-se assim necessário aproximar a solução dos mesmos. No presente trabalho, utilizam-se para esse efeito os elementos finitos híbridos-Trefftz.

Em todas as classes de elementos finitos, o domínio do problema é discretizado em subdomínios, tipicamente de dimensões reduzidas, nos quais se assume que os campos a determinar são representáveis partindo da combinação linear de funções simples (funções de aproximação).

A formulação de elementos finitos mais comum em programas de cálculo automático é a baseada em elementos conformes de deslocamento, na qual é aproximado o campo dos deslocamentos utilizando funções que garantam a satisfação local (isto é, em todos os pontos) das equações de compatibilidade no domínio e nas fronteiras cinemáticas. No caso, os pesos através dos quais se combinam as funções de aproximação são os próprios deslocamentos nodais, e são determinados recorrendo à imposição das condições de equilíbrio no domínio, e nos nós dos elementos.

Conhecida a aproximação do campo de deslocamentos, derivam-se os campos de deformações e tensões, seguindo um critério sucessivo na imposição das condições de compatibilidade e elasticidade. No entanto, as aproximações às deformações e tensões que resultam deste procedimento apresentam, tipicamente, uma qualidade inferior à apresentada pelos deslocamentos. Nomeadamente, essas aproximações derivadas são caracterizadas, em geral, por descontinuidades  $C^0$  dos respetivos campos de tensão entre elementos adjacentes (equilíbrio local não garantido).

Esse problema pode ter consequências na área da Mecânica Estrutural e para efeitos de projeto, pois os engenheiros estão geralmente mais interessados em boas aproximações dos campos de tensões e não dos de deslocamentos.

Tal incerteza nos campos de tensões suscita a necessidade de ser colmatada, existindo vários métodos para o fazer, um dos quais é a formulação de elementos híbridos-Trefftz, que é aplicada no presente trabalho.

Nos elementos híbridos-Trefftz, as funções de aproximação utilizadas são condicionadas a satisfazer localmente a equação de Navier no domínio de cada elemento (condição de Trefftz), mas, contrariamente aos elementos conformes de deslocamento, não garantem a compatibilidade local

nas fronteiras cinemáticas do corpo. Satisfeitas todas as equações no domínio através da escolha das funções de aproximação, os pesos respectivos determinam-se impondo em forma fraca as condições de equilíbrio e compatibilidade nas fronteiras de cada elemento. Obtêm-se, desta forma, soluções que, não sendo nem localmente compatíveis, nem localmente equilibradas, garantem um melhor equilíbrio entre a qualidade das aproximações dos campos de deslocamentos e de tensões.

Neste capítulo, apresentam-se os elementos finitos híbridos-Trefftz no seu modelo de deslocamentos.

Derivando do conceito geral de elemento híbrido, introduz-se a aproximação dos campos de deslocamentos, deformações e tensões no domínio e, de seguida, definem-se as aproximações adicionais e independentes das forças nas fronteiras de Dirichlet e interelementares.

Uma vez expressas as aproximações necessárias à total definição do problema, procede-se ao desenvolvimento da formulação, impondo em forma fraca a equação de Navier no domínio de cada elemento e a compatibilidade nas fronteiras de Dirichlet e interelementares.

As equações assim obtidas formam o sistema governativo do problema, através da resolução do qual são obtidos os pesos de cada função de aproximação da resposta estrutural.

De seguida, apresenta-se a condição de Trefftz, com a qual se torna possível reduzir todos os termos do sistema resolutivo à fronteira. Resolve-se ainda, de forma explícita, a equação de Navier, deduzindo-se as expressões das funções a incluir na base de aproximação dos elementos de Trefftz.

Por fim, apresenta-se o conceito de indeterminação estática e cinemática do sistema.

## 3.2 Discretização do meio

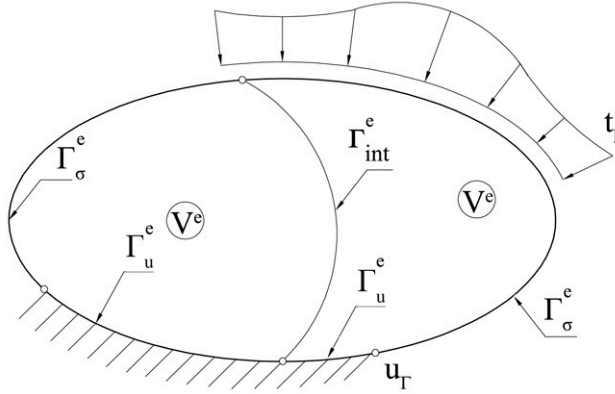
Na figura 3.1, representa-se o domínio  $V$  do problema descrito no capítulo anterior, discretizado em elementos finitos. Assume-se que  $V^e$  e  $\Gamma^e$  representam o domínio e a fronteira de um elemento finito, respetivamente.

A superfície do elemento,  $\Gamma^e$  inclui as fronteiras estáticas e cinemáticas do mesmo, conforme descrito na secção 2.3.1. No entanto, relativamente à figura 2.1, a figura 3.1 define um novo tipo de fronteiras, consequência do processo de discretização do corpo, as fronteiras interiores ou interelementares,  $\Gamma_{int}^e$ , tratadas, pelo modelo dos deslocamentos, como fronteiras de Dirichlet (cinemáticas). Seguindo a nomenclatura habitual do método dos elementos finitos, sublinha-se o surgimento de notações que permitem distinguir as fronteiras onde se aproximam ou não quantidades.

Assim, na formulação adotada no texto, as fronteiras de Dirichlet e interelementares são definidas como fronteiras essenciais (onde se aproximam quantidades), tal que,  $\Gamma_u^e \cup \Gamma_{int}^e = \Gamma_e^e$ , e as fronteiras de Neumann assumem ainda o desígnio de fronteiras naturais (onde não se aproximam quantidades),  $\Gamma_\sigma^e = \Gamma_n^e$ . Assim, a fronteira do elemento fica expressa como,  $\Gamma^e = \Gamma_u^e \cup \Gamma_{int}^e \cup \Gamma_\sigma^e = \Gamma_e^e \cup \Gamma_n^e$ . Por uma questão de clareza, na derivação das equações governativas no texto apresentado, estas parcelas tratam-se apenas por fronteiras essenciais ( $\Gamma_e^e$ ) e fronteiras de Neumann ( $\Gamma_\sigma^e$ ).

De notar que não são atribuídos quaisquer tipos de constrangimento à geometria do elemento, o que permite a utilização de um número arbitrário de elementos finitos que não precisam de ser

simplesmente conexos, de formarem malhas conformes ou de terem fronteiras retas.



**Figura 3.1:** Elementos finitos, fronteiras de Neumann ( $\Gamma^e_\sigma$ ), Dirichlet ( $\Gamma^e_u$ ) e interiores ( $\Gamma^e_{int}$ ).

### 3.3 Elementos híbridos-Trefftz de deslocamento para problemas de elasticidade plana

A formulação dos elementos híbridos-Trefftz para problemas planos é apresentada nesta secção. A derivação reflete a perspectiva proposta na referência [66], que encara os elementos híbridos-Trefftz como um caso particular dos elementos (puramente) híbridos, nos quais as funções de aproximação são escolhidas do espaço das soluções da equação de Navier (2.22). Por consequência, as equações governativas da formulação híbrida são derivadas primeiro, sendo de seguida demonstradas as simplificações que resultam da inclusão na base do domínio de funções que satisfazem localmente a equação (2.22).

#### 3.3.1 Aproximações

Nesta secção definem-se as aproximações necessárias para expressar os campos de deslocamento, deformação e de tensão experimentados pelo corpo no domínio, tal como os campos das forças que ocorrem nas fronteiras essenciais da malha.

Como já introduzido, o campo de deslocamentos é a aproximação primária do problema, definida através do produto entre as funções de aproximação contidas na base,  $\Psi$ , e os respectivos pesos,

$$\mathbf{u}(x, y) = \Psi(x, y) \mathbf{q}, \text{ em } V^e \quad (3.1)$$

Na relação (3.1), o vetor dos coeficientes,  $\mathbf{q}$ , traduz os deslocamentos generalizados associados à base de aproximação  $\Psi$ . No entanto, estes deslocamentos generalizados, não têm, em geral, nenhum significado físico, como no caso dos pesos associados aos elementos finitos conformes de deslocamento.

O campo das deformações induzido pela aproximação ao campo de deslocamentos (3.1) garante o cumprimento local da condição de compatibilidade (2.17) no domínio, e é traduzido por,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi}(x, y) \mathbf{q}, \text{ em } V^e \quad (3.2)$$

Fazendo a notação,  $\mathbf{E}(x, y) = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi}(x, y)$ , a definição (3.2) simplifica-se a,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{E}(x, y) \mathbf{q}, \text{ em } V^e \quad (3.3)$$

No domínio do elemento, a aproximação ao campo das tensões é derivada da aproximação ao campo das deformações impondo localmente a equação de elasticidade (2.18),

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{S}(x, y) \mathbf{q}, \text{ em } V^e \quad (3.4)$$

onde,  $\mathbf{S} = \mathbf{kE}$ .

Por outro lado, a aproximação das forças  $\mathbf{t}$  nas fronteiras essenciais, é realizada de forma independente da aproximação das tensões no domínio. Assim, nas fronteiras essenciais, a aproximação é materializada por,

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{Z}(s) \mathbf{p}, \text{ em } \Gamma_e^e \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{Z}$  representa a base das funções de aproximação da fronteira,  $\mathbf{p}$  o vetor das forças generalizadas e  $s$  a coordenada local da fronteira,  $s \in [-1, 1]$ . À semelhança dos deslocamentos generalizados, as forças generalizadas presentes no vetor  $\mathbf{p}$  são independentes dos nós e não têm, em geral, significado físico.

De referir que todas as bases de aproximação são hierárquicas, ou seja, são desligadas dos nós, e o acréscimo de novas funções às bases não faz com que as funções anteriores se alterem.

Seguindo a lógica da apresentação estipulada nesta secção, nenhuma condição (para além de serem completas e linearmente independentes) é imposta nesta fase às bases  $\boldsymbol{\Psi}$  e  $\mathbf{Z}$ . As derivações das equações no domínio e na fronteira, apresentadas de seguida, são também feitas para o caso mais geral (ou seja, para elementos finitos híbridos), sem assumir ainda que a base  $\boldsymbol{\Psi}$  satisfaz a condição de Trefftz.

### 3.3.2 Equações no domínio

Como é típico de todos os elementos híbridos de deslocamento, a equação no domínio é obtida impondo em forma fraca a equação de Navier (2.22), utilizando as funções da base de aproximação  $\boldsymbol{\Psi}$  para ponderação,

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\Psi}^T [\mathbf{D} (\mathbf{kD}^* \mathbf{u})] dV^e = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Tirando partido do Teorema da Divergência, a equação (3.6) é integrada por partes, de maneira a provocar o surgimento dos termos definidos nas fronteiras, onde as respetivas condições e aproximações serão aplicadas.

$$\int_{\Gamma_e^e \cup \Gamma_\sigma^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma^e - \int_{V^e} (\mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi})^T \mathbf{k} (\mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV^e = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Separando o primeiro integral da equação (3.7) numa soma nas fronteiras de Neumann e essenciais, obtém-se,

$$-\int_{\Gamma_\sigma^e} \Psi^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_\sigma^e - \int_{\Gamma_e^e} \Psi^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_e^e + \int_{V^e} (\mathbf{D}^* \Psi)^T \mathbf{k} (\mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV^e = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Na equação (3.8), insere-se a condição de fronteira de Neumann (2.27), que expressa as forças conhecidas induzidas ao corpo,

$$\int_{V^e} (\mathbf{D}^* \Psi)^T \mathbf{k} (\mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV^e - \int_{\Gamma_e^e} \Psi^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_e^e = \int_{\Gamma_\sigma^e} \Psi^T \mathbf{t}_\Gamma d\Gamma_\sigma^e \quad (3.9)$$

Na equação (3.9) substituem-se as aproximações (3.1) e (3.5) dos campos de deslocamento no interior do elemento e das forças nas fronteiras essenciais.

$$\int_{V^e} (\mathbf{D}^* \Psi)^T \mathbf{k} (\mathbf{D}^* \Psi) dV^e \mathbf{q} - \int_{\Gamma_e^e} \Psi^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \mathbf{p} = \int_{\Gamma_\sigma^e} \Psi^T \mathbf{t}_\Gamma d\Gamma_\sigma^e \quad (3.10)$$

Fazendo-se as definições,

$$\mathbf{K} = \int_{V^e} (\mathbf{D}^* \Psi)^T \mathbf{k} (\mathbf{D}^* \Psi) dV^e \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Gamma_e^e} \Psi^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \quad (3.12)$$

$$\overline{\mathbf{t}_\Gamma} = \int_{\Gamma_\sigma^e} \Psi^T \mathbf{t}_\Gamma d\Gamma_\sigma^e \quad (3.13)$$

a equação no domínio (3.6) escrita de forma matricial resulta,

$$\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{B} \mathbf{p} = \overline{\mathbf{t}_\Gamma} \quad (3.14)$$

Na equação (3.14),  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do elemento finito, definida no domínio,  $\mathbf{B}$  a matriz de fronteira, definida nas fronteiras essenciais, e  $\overline{\mathbf{t}_\Gamma}$  o vetor das forças aplicadas, definido nas fronteiras de Neumann.

No entanto, como já referido anteriormente, nas formulações híbridas não é garantida a compatibilidade local através da escolha das bases de aproximação, tornando-se clara a necessidade de garantir a compatibilidade nas fronteiras essenciais do corpo através de um conjunto adicional de equações. Essas equações desenvolvem-se na secção seguinte.

### 3.3.3 Equações na fronteira

A condição de compatibilidade (2.28) é imposta em forma fraca nas fronteiras essenciais, utilizando as funções contidas na base das forças  $\mathbf{Z}$  para ponderação,

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\Gamma) d\Gamma_u = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

Aplicando a aproximação dos deslocamentos no domínio (3.1), a equação (3.15) assume a forma,

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Psi} d\Gamma_u \mathbf{q} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T \mathbf{u}_\Gamma d\Gamma_u \quad (3.16)$$

Inserindo a definição (3.12) na equação (3.16), obtém-se,

$$\mathbf{B}^T \mathbf{q} = \overline{\mathbf{u}_\Gamma} \quad (3.17)$$

fazendo-se a notação,

$$\overline{\mathbf{u}_\Gamma} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T \mathbf{u}_\Gamma d\Gamma_u \quad (3.18)$$

Tal como referido na secção 3.2, nas fronteiras interelementares deve ser assegurada a continuidade cinemática, expressa em forma fraca por,

$$\int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) d\Gamma_{int} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  são os deslocamentos ao nível da fronteira  $\Gamma_{int}$  nos elementos 1 e 2, que partilham a mesma fronteira.

Aplicando a aproximação do campo de deslocamentos (3.1) na equação (3.19), obtém-se,

$$\int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Psi}_1 d\Gamma_{int} \mathbf{q}_1 = \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Psi}_2 d\Gamma_{int} \mathbf{q}_2 \quad (3.20)$$

e escrevendo a equação (3.20) de forma matricial, resulta,

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{q}_1 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{q}_2 = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Apresentadas as equações que definem o problema no domínio e na fronteira, procede-se, na secção seguinte, à apresentação do sistema resolutivo que rege o problema.

### 3.3.4 Sistema resolutivo

Conhecidas as equações (3.14), (3.17) e (3.21), é possível construir o sistema resolutivo do modelo de deslocamentos dos elementos híbridos,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{t}_\Gamma} \\ -\overline{\mathbf{u}_\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

O sistema (3.22) é simétrico e esparso. A sua simetria é justificada, na elasticidade plana, pela simetria da matriz de rigidez do material. De notar ainda que a montagem da matriz de rigidez do modelo híbrido,  $\mathbf{K}$ , não envolve somatórios entre as matrizes de rigidez dos elementos constituintes do meio. Pelo contrário, cada elemento terá a sua matriz de rigidez inserida de forma independente na diagonal da matriz dos coeficientes. Por consequência, os refinamentos das bases de aproximação podem ser diferentes de elemento para elemento. Esta característica facilita o refinamento localizado e adaptativo, oferecendo assim ao utilizador uma flexibilidade considerável na definição do modelo computacional.



Ao invés dos pesos  $\mathbf{q}$  associados às bases de deslocamentos nos domínios dos elementos, as forças generalizadas  $\mathbf{p}$  podem ser partilhadas por dois elementos adjacentes. Mesmo nesse caso, a montagem do sistema resolutivo permite atribuir bases de aproximação diferentes a cada uma das fronteiras essenciais do modelo.

A dimensão do vetor  $\mathbf{q}$ , que lista os deslocamentos generalizados, define o número de graus de liberdade cinemáticos associados a cada elemento. Já a dimensão do vetor  $\mathbf{p}$ , que expressa as forças generalizadas nas fronteiras essenciais, traduz os graus de liberdade estáticos associados às mesmas, que podem ser partilhados no máximo por dois elementos vizinhos.

Na figura 3.2 apresenta-se a configuração do sistema resolutivo para um exemplo concreto realizado em ambiente Matlab.

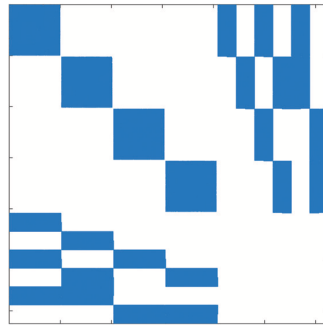


Figura 3.2: Sistema esparsa e simétrico.

### 3.3.5 Condição de Trefftz

A particularidade que distingue os elementos híbridos-Trefftz de outros elementos híbridos é que as funções de aproximação da base  $\Psi$  são escolhidas de forma a que satisfaçam localmente todas as equações no domínio do elemento.

Desta forma, as funções de aproximação dos deslocamentos que provocam deformações, são obtidas resolvendo a equação,

$$\mathbf{D}\mathbf{k}\mathbf{D}^*\Psi = \mathbf{0}, \text{ em } V^e \quad (3.23)$$

ao passo que os modos de deslocamento de corpo rígido satisfazem a equação,

$$\mathbf{D}^*\Psi = \mathbf{0}, \text{ em } V^e \quad (3.24)$$

Inserindo na equação (3.23) a condição de compatibilidade (3.3) e a condição de elasticidade (3.4), obtém-se a condição de equilíbrio expressa por,

$$\mathbf{D}\mathbf{S} = \mathbf{0}, \text{ em } V^e \quad (3.25)$$

As condições (3.23) e (3.25) restringem consideravelmente a escolha das funções a incluir nas bases do domínio e obrigam a que essas funções sejam determinadas antes da construção do sistema resolutivo, tendo em conta as condições particulares de cada problema. Por outro lado, esse esforço adicional é justificado pela aquisição de vantagens importantes no funcionamento

destes elementos, conforme descrito na secção 1.2. A derivação das funções a incluir nas bases  $\Psi$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{S}$  é apresentada na secção 3.3.6.

A expressão (3.22) do sistema resolutivo permanece válida para os elementos cujas bases no domínio são construídas com funções de Trefftz. Por outro lado, quando se utilizam as bases de Trefftz, as propriedades (3.23) e (3.25) fazem com que a expressão da matriz de rigidez se reduza a um integral na fronteira do elemento. Com efeito, integrando por partes o integral presente na definição (3.11), e considerando as condições de Trefftz, (3.23) e (3.25), obtém-se,

$$\mathbf{K} = \int_{V^e} (\mathbf{D}^* \Psi)^T \mathbf{S} dV^e = \int_{\Gamma^e} \Psi^T (\mathbf{nS}) d\Gamma^e - \int_{V^e} \Psi^T \mathbf{DS} dV^e \quad (3.26)$$

Por desenvolvimento, aplicando a condição (3.25) na equação (3.26) a mesma reduz-se a um integral na fronteira do elemento,

$$\mathbf{K} = \int_{\Gamma^e} \Psi^T (\mathbf{nS}) d\Gamma^e \quad (3.27)$$

onde a matriz das componentes da normal à fronteira,  $\mathbf{n}$ , é descrita na secção 2.3.2.

Na equação (3.27) fica expressa umas das propriedades mais significativas dos elementos finitos híbridos-Trefftz, que é o facto de todos os integrais presentes no sistema (3.22) serem redutíveis à fronteira. Esta propriedade torna mais célere e, em geral, mais exata a avaliação numérica da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e levanta as restrições topológicas que advêm da definição das quadraturas no domínio do elemento.

Para além de ser completa e linearmente independente, nenhuma outra limitação é imposta à escolha da base (hierárquica)  $\mathbf{Z}$  na fronteira essencial do elemento.

### 3.3.6 Funções de aproximação

As funções constituintes das bases de aproximação de Trefftz, são derivadas resolvendo a equação de Navier (2.22). Para tal, a equação (3.6) é escrita de forma explícita,

$$\nabla (k_{12} + k_{33}) \nabla^T \mathbf{u} + k_{33} \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

sendo  $\nabla$  o operador gradiente,

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$\nabla^T$ , o operador divergência,

$$\nabla^T = \begin{pmatrix} \partial x & \partial y \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$\nabla^2$ , o operador Laplaciano,

$$\nabla^2 = \partial x^2 + \partial y^2 \quad (3.31)$$

e  $k_{ij}$  o termo da linha  $i$  e coluna  $j$  das matrizes de rigidez do material (2.19) ou (2.20) correspondentes aos estados planos de tensão e deformação, respetivamente. Os termos  $k_{11}$  e  $k_{22}$  são eliminados observando que,

$$\begin{cases} k_{22} = k_{11} \\ k_{11} = k_{12} + 2k_{33} \end{cases} \quad (3.32)$$

A equação (3.28) admite duas classes de soluções, obtidas utilizando funções potencial harmónicas e bi-harmónicas, respetivamente, que correspondem às parcelas  $\Psi_{\mathbf{h}}$  e  $\Psi_{\mathbf{b}}$  da base dos deslocamentos  $\Psi$ .

A primeira classe é obtida assumindo que o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  é definido como sendo o gradiente de uma função potencial  $\phi_h$ ,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \nabla \phi_h \quad (3.33)$$

Substituindo a definição (3.33) na equação (3.28), obtém-se,

$$\nabla [(k_{12} + k_{33}) \nabla^2 \phi_h] + k_{33} \nabla \nabla^2 \phi_h = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

A equação (3.34) é satisfeita por todos os potenciais harmónicos,  $\nabla^2 \phi_h = 0$ .

A derivação dos potenciais harmónicos é feita num referencial polar  $(r, \theta)$ , local do elemento. Esta opção é justificada por experiências numéricas anteriores [50], que demonstram que a utilização deste referencial pode levar a soluções numericamente mais estáveis e menos poluídas por efeitos espúrios.

Assim, no referencial polar  $(r, \theta)$ , as funções harmónicas utilizadas para construir a base de deslocamento,  $\Psi_{\mathbf{h}}$ , são definidas pelas seguintes expressões,

$$\phi_h(r, \theta) = \left( \begin{array}{c} r^{n+1} \sin[(n+1)\theta] \\ r^{n+1} \cos[(n+1)\theta] \\ \ln(r) \\ \theta \end{array} \right) \quad (3.35)$$

Por opção, as funções utilizadas para a base de deslocamentos,  $\Psi_{\mathbf{h}}$ , são,

$$\phi_h(r, \theta) = \left( \begin{array}{c} r^{n+1} \sin[(n+1)\theta] \\ r^{n+1} \cos[(n+1)\theta] \end{array} \right) \quad (3.36)$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ .

De notar que os dois últimos potenciais presentes na definição (3.35) não são incluídos na base  $\Psi_{\mathbf{h}}$  por serem singular na origem e descontínuo, respetivamente. Pela mesma razão, os potenciais (3.35) não são construídos utilizando o parâmetro  $n = 0$ , pois este causaria campos de tensão singulares. No entanto, estas funções podem ser inseridas na base quando se pretende analisar estruturas com campos de tensão singulares, como ocorrem, por exemplo, na presença de fendas ou cargas concentradas [50]. As funções da definição (3.36) são substituídas na condição (3.33), gerando os seguintes campos de deslocamentos,

$$\Psi_{\mathbf{h}}(r, \theta) = r^n \left( \begin{array}{c} \sin[(n+1)\theta] \\ \cos[(n+1)\theta] \end{array} \right), \quad n \geq 1 \quad (3.37)$$

Da mesma maneira, substituindo a equação (3.37) na condição de compatibilidade (3.3), as funções de aproximação referentes ao campo das deformações resultam,

$$\mathbf{E}_h(r, \theta) = nr^{n-1} \begin{pmatrix} \sin[(n+1)\theta] & \cos[(n+1)\theta] \\ -\sin[(n+1)\theta] & -\cos[(n+1)\theta] \\ 2\cos[(n+1)\theta] & -2\sin[(n+1)\theta] \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Inserindo a equação (3.38) na condição de elasticidade (3.4), obtém-se,

$$\mathbf{S}_h(r, \theta) = k_{33} nr^{n-1} \begin{pmatrix} \sin[(n+1)\theta] & \cos[(n+1)\theta] \\ -\sin[(n+1)\theta] & -\cos[(n+1)\theta] \\ \cos[(n+1)\theta] & -\sin[(n+1)\theta] \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

A segunda classe de soluções é obtida assumindo que o campo de deslocamentos é da forma,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = [(k_{12} + k_{33})\tilde{\nabla}\tilde{\nabla}^T\phi_b] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_{33}\nabla^2\phi_b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

onde  $\tilde{\nabla}$  é o operador rotacional, tal que,  $\tilde{\nabla}^T\tilde{\nabla} = \nabla^2$  e  $\nabla^T\tilde{\nabla} = 0$ .

Substituindo a definição (3.40) na equação (3.28), obtém-se uma equação que é satisfeita por todos os potenciais bi-harmônicos,  $\nabla^4\phi_b = 0$ .

Num referencial polar  $(r, \theta)$ , as funções bi-harmônicas utilizadas para construir a base de deslocamento,  $\Psi_b$ , são dadas pela seguinte expressão,

$$\phi_b(r, \theta) = \begin{pmatrix} r^{n+1} \sin[(n-1)\theta] & r^{n+1} \cos[(n-1)\theta] & r^2 \ln(r) & r^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ .

Por opção, as funções utilizadas para as bases de deslocamentos,  $\Psi_b$ , são,

$$\phi_b(r, \theta) = \begin{pmatrix} r^{n+1} \sin[(n-1)\theta] & r^{n+1} \cos[(n-1)\theta] \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

De forma análoga ao apresentado para as bases harmônicas  $\Psi_h$ , em que dois potenciais presentes na definição (3.35) não são incluídos na base, os seus homólogos para a base bi-harmônica  $\Psi_b$ , também não são incluídos, pelas mesmas razões. Adicionalmente, os potenciais bi-harmônicos não são construídos utilizando o parâmetro  $n = 0$ , pois este causaria, à semelhança dos potenciais harmônicos, campos de tensão singulares.

Os potenciais (3.42) inseridos na definição (3.40) geram os seguintes campos de deslocamentos,

$$\begin{aligned} \Psi_b(r, \theta) = \\ = r^n \begin{pmatrix} [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)] \sin[(n-1)\theta] & [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)] \cos[(n-1)\theta] \\ [k_{33}(n+3) + k_{12}(n+1)] \cos[(n-1)\theta] & -[k_{33}(n+3) + k_{12}(n+1)] \sin[(n-1)\theta] \end{pmatrix}, n \geq 1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Da mesma maneira, substituindo a equação (3.43) na condição de compatibilidade (3.3), as funções de aproximação referentes ao campo das deformações, obtêm-se da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_b(r, \theta) = \\ = nr^{n-1} \begin{pmatrix} [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)] \sin[(n-1)\theta] & [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)] \cos[(n-1)\theta] \\ [k_{33}(n+1) + k_{12}(n-1)] \sin[(n-1)\theta] & -[k_{33}(n+1) + k_{12}(n-1)] \cos[(n-1)\theta] \\ [2(k_{12} + k_{33})(n-1)] \cos[(n-1)\theta] & [-2(k_{12} + k_{33})(n-1)] \sin[(n-1)\theta] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Inserindo a equação (3.44) na condição de elasticidade (3.4), resulta,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_b(r, \theta) = \\ = 2k_{33}(k_{12} + k_{33})nr^{n-1} \begin{pmatrix} (n-3) \sin[(n-1)\theta] & (n-3) \cos[(n-1)\theta] \\ -(n+1) \sin[(n-1)\theta] & -(n+1) \cos[(n-1)\theta] \\ (n-1) \cos[(n-1)\theta] & -(n-1) \sin[(n-1)\theta] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.45)$$

De notar que, para  $n = 1$ , apenas um dos modos dos deslocamentos lineares referidos nas soluções (3.43) a (3.45) gera tensões. O outro modo gera um modo de rotação de corpo rígido que será incorporado na base  $\Psi_r$  de seguida, através da substituição de  $n = 1$  na primeira coluna das respetivas matrizes.

Assim, para além dos deslocamentos obtidos acima, é necessário introduzir uma terceira classe de funções na base dos deslocamentos que denotam fisicamente os deslocamentos de corpo rígido dos elementos,

$$\Psi_r = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ r & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

A primeira parcela de  $\Psi_r$  representa o movimento de rotação pura, a segunda e a terceira parcelas deslocamentos constantes em  $x$  em  $y$ , respetivamente.

Assim, as bases de aproximação dos deslocamentos, deformações e tensões são completamente definidas por,

$$\Psi = (\underbrace{\Psi_h}_{2n_D} | \underbrace{\Psi_b}_{2n_D-1} | \underbrace{\Psi_r}_3) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_h | \mathbf{E}_b) \quad (3.48)$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{S}_h | \mathbf{S}_b) \quad (3.49)$$

Na definição (3.47) são ainda identificadas as dimensões dos modos que provocam deformações e os de corpo rígido, onde o parâmetro  $n_D$  representa a ordem máxima das funções inseridas nas definições (3.36) e (3.42) e 3 os modos de corpo rígido presentes na definição (3.46).

Com a apresentação completa das bases de deslocamentos (3.47) e tensões (3.49) o sistema (3.22) dos elementos finitos híbridos-Trefftz, assume agora a forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{hh} & \mathbf{K}_{hb} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_h \\ \mathbf{K}_{bh} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_r \\ -\mathbf{B}_h^T & -\mathbf{B}_b^T & -\mathbf{B}_r^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_h \\ \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_r \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{t}}_\Gamma \\ \overline{\mathbf{t}}_\Gamma \\ \mathbf{0} \\ -\overline{\mathbf{u}}_\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Atendendo à expressão (3.47) da base de aproximação  $\Psi$ , as matrizes  $\mathbf{K}_{hh}$  e  $\mathbf{K}_{bb}$  representam os blocos da matriz de rigidez referentes às parcelas harmónicas e bi-harmónicas da base  $\Psi$ . São matrizes quadradas e de dimensão igual a  $2n_D$  e  $2n_D - 1$ , respetivamente.

Assim, a dimensão total da base no domínio de cada elemento é de  $4n_D - 1 + 3$ . A construção do sistema resolutivo (3.50) é exemplificada de forma mais detalhada na secção 4.4.1 através de um exemplo ilustrativo (figuras 4.5 e 4.7).

### 3.3.7 Indeterminação estática e cinemática

Para o sistema resolutivo apresentado na equação (3.50) ter solução única, as bases de aproximação nos domínios e nas fronteiras devem ser escolhidas de forma a garantir que o problema seja estática e cinematicamente indeterminado. Esta é uma condição de significativa importância por ser um foco de erros numéricos comum para este tipo de problemas.

Um problema é estaticamente indeterminado se as forças generalizadas  $\mathbf{p}$  não se puderem determinar apenas através das equações de equilíbrio no domínio do elemento. Do mesmo modo, um problema diz-se cinematicamente indeterminado se os deslocamentos generalizados  $\mathbf{q}_h$ ,  $\mathbf{q}_b$  e  $\mathbf{q}_r$  não se conseguirem obter diretamente pelas equações de compatibilidade nas fronteiras essenciais.

O valor  $\alpha$  ( $\beta$ ), representativo do valor da indeterminação estática (cinemática) traduz a diferença entre o número total de graus de liberdade presentes nas equações de equilíbrio no domínio (compatibilidade na fronteira) e o respetivo número de equações do sistema que assegura a condição de equilíbrio (compatibilidade).

Assim os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , obtêm-se por,

$$\begin{aligned} \alpha &= [\dim(\mathbf{q}_h) + \dim(\mathbf{q}_b) + \dim(\mathbf{p})] - [\dim(\mathbf{q}_h) + \dim(\mathbf{q}_b) + \dim(\mathbf{q}_r)] = \\ &= \dim(\mathbf{p}) - \dim(\mathbf{q}_r) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\beta = \dim(\mathbf{q}_h) + \dim(\mathbf{q}_b) + \dim(\mathbf{q}_r) - \dim(\mathbf{p}) \geq 0 \quad (3.52)$$

Depreende-se da definição da indeterminação estática que o sistema é hiperstático sempre que existam fronteiras cinemáticas suficientes para limitar os deslocamentos de corpo rígido da estrutura. Com a condição associada à indeterminação estática pretende-se evitar situações de mecanismos estruturais obtidos pela definição de estruturas hipoestáticas. De notar, no entanto, que para garantir a indeterminação estática, a condição de hiperestatia do sistema não é suficiente, já que também se deve garantir a inexistência de ligações mal distribuídas no modelo.

Por sua vez, a verificação da condição de indeterminação cinemática do sistema, pressupõe a verificação da condição  $\dim(\mathbf{q}_h) + \dim(\mathbf{q}_b) + \dim(\mathbf{q}_r) \geq \dim(\mathbf{p})$ , que expressa um fator de importância considerável na definição das ordens das funções das bases de aproximação, no domínio e na fronteira do elemento finito, de modo a garantir um sistema bem condicionado.

A escolha da ordem das bases de aproximação deve, assim, ser feita tendo em conta as condições apresentadas que garantam as indeterminações estática e cinemática, conforme discutido e analisado de forma mais detalhada no capítulo da implementação, na secção 4.4.2, e apresentado no exemplo ilustrado na secção D.2.3 do anexo D.





## Capítulo 4

# Implementação computacional

### 4.1 Introdução

No presente capítulo é apresentada a metodologia da implementação computacional dos elementos finitos híbridos-Trefftz apresentados no capítulo anterior, em ambiente Matlab.

A implementação foi desenvolvida de raiz para problemas estáticos de elasticidade plana, e concebida para se integrar numa plataforma computacional mais alargada que abrange também problemas térmicos e acústicos, sendo no entanto, a primeira ferramenta computacional para problemas estruturais desenvolvida neste âmbito. A implementação segue a lógica de programação comum a todos os elementos na plataforma, adaptada à situação de estudo em concreto.

O presente capítulo está organizado de maneira a ilustrar o completo funcionamento do programa computacional, distinguindo as três fases que o caracterizam, a fase do pré-processamento, processamento e pós-processamento.

A primeira fase corresponde à introdução de dados por parte do utilizador, seguida pela geração da malha, a definição da topologia da mesma e a organização das estruturas de dados onde se guarda essa informação.

A fase seguinte corresponde ao cálculo dos coeficientes do sistema resolutivo, seguido pela sua montagem considerando as dimensões das bases de aproximação que o constituem, no domínio e na fronteira. A descrição desta fase inclui o processo que garante o cumprimento da condição de indeterminação cinemática ao nível do elemento e da estrutura, a metodologia de integração numérica com a apresentação das técnicas computacionais utilizadas e os processos de pré-condicionamento e resolução do sistema governativo.

Relativamente à fase do pós-processamento, descreve-se a construção dos campos das soluções (deslocamentos e tensões), apresenta-se a definição da energia de deformação e refere-se o processo utilizado para a leitura e apresentação dos ficheiros de *output*.

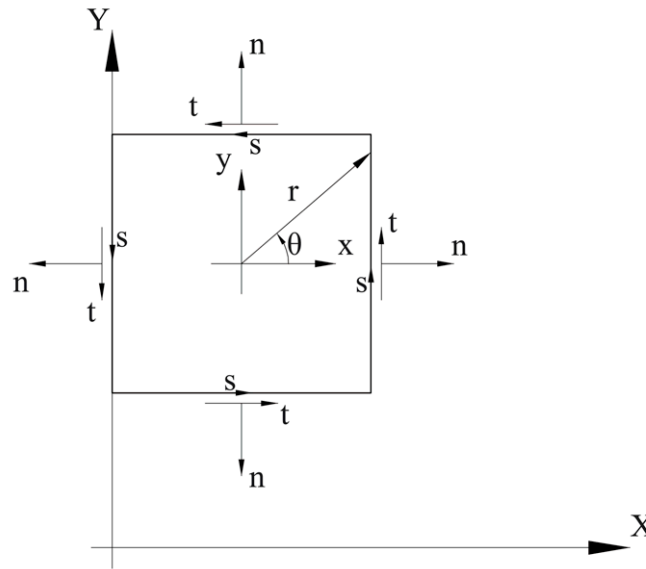
### 4.2 Metodologia adotada

Esta secção procura descrever a organização geral da implementação, que será pormenorizada nas secções 4.3 a 4.5.

Procurou-se, a cada passo da implementação, expressar as quantidades de interesse nos sistemas de referência mais adequados ao objetivo pretendido. Desta forma, considerou-se útil descrever aqui estes sistemas de referência, de modo a facilitar a leitura dos restantes tópicos tratados neste capítulo.

#### 4.2.1 Sistemas de referência

Para a definição do modelo e posterior funcionamento eficiente do algoritmo é necessário considerar a contribuição de diferentes sistemas de referência, como os ilustrados na figura 4.1 (com os respetivos sentidos positivos), e descritos de seguida.



**Figura 4.1:** Sistemas de referência.

- No referencial global  $(X, Y)$  definem-se a geometria da estrutura, bem como as expressões paramétricas das fronteiras. É ainda um referencial de preponderância notável na apresentação dos campos da solução.
- O referencial local Cartesiano  $(x, y)$  situa-se com a origem no centróide do elemento. Os seus eixos são orientados paralelamente aos eixos globais coordenados.
- O referencial local polar  $(r, \theta)$  situa-se geometricamente na posição homóloga à do referencial local Cartesiano. É nele que ficam expressas as funções da base de aproximação do domínio dos elementos.
- O referencial normal-tangencial  $(n, t)$  da fronteira permite ao utilizador definir as condições de fronteira, expressas nas suas componentes normal e tangencial, coerentes com a convenção positiva dos sinais. Neste referencial são expressas ainda as equações de compatibilidade interelementares.

- O referencial da fronteira ( $s$ ) utiliza-se para definir as funções da base de aproximação nas fronteiras dos elementos e a localização dos pontos de Gauss-Legendre para os processos de integração numérica necessários para calcular os coeficientes do sistema resolutivo.

#### 4.2.2 Fases da análise do modelo

Nesta secção apresenta-se de forma sucinta a organização geral do programa, seguindo as etapas descritas na secção 4.1.

##### Pré-processamento

Nesta etapa, o utilizador deve definir todos os dados de entrada do modelo que pretende analisar, sendo que estes devem ser introduzidos num único ficheiro de *input*, através da função *Input\_Proc*, referenciada no anexo B.

Os dados de entrada que o utilizador deve definir dizem respeito à geometria do modelo (incluindo a malha de elementos finitos), aos refinamentos das bases de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais dos elementos constituintes da malha, ações induzidas, condições de fronteira cinemáticas e às propriedades mecânicas dos materiais que compõem o modelo. Nesta fase, são ainda definidos pelo utilizador o número de pontos de Gauss-Legendre para a integração numérica e o número de divisões em que pretende dividir o domínio para a representação gráfica dos resultados.

O processo de representação geométrica da estrutura e da malha de elementos finitos é feito no referencial global, onde todos os elementos são referenciados no mesmo conjunto de eixos. O utilizador pode optar pela construção de um modelo composto por elementos retangulares, através do gerador de malha regular, ou pela definição de um modelo composto por elementos triangulares, através do gerador de malha não-regular. A primeira opção poderá ser a mais indicada para a discretização de estruturas planas de geometria retangular, ao passo que a segunda opção adequa-se a geometrias menos regulares, mas pode conduzir a malhas mais distorcidas. Em qualquer caso, o utilizador controla o número de elementos que pretende ter na malha para o caso seguido, como explicado na secção 4.3.1, e/ou a dimensão máxima dos elementos.

Uma vez completa a etapa da introdução dos dados referentes à geometria do modelo por parte do utilizador, o programa, através da função *GenerateMesh* (referenciada no anexo B), gera efetivamente a malha, devolvendo os seus dados topológicos. Estes dados, que caracterizam geometricamente a malha de elementos finitos, permitem que a informação conheça assim uma estruturação lógica consistente com a correlação espacial, capaz de relacionar os nós com as fronteiras e os respetivos elementos.

A informação topológica devolvida pelo gerador de malha é incorporada nas estruturas de dados referentes às fronteiras (**Edges**) e aos elementos (**Loops**), que armazenam e organizam a respetiva informação. A informação topológica inserida nas estruturas **Edges** e **Loops** é complementada pela informação relativa às bases de aproximação e ainda pelas características do material que compõe o modelo.

Uma outra estrutura de dados, que diz respeito às condições de fronteira (**BConds**), contém informação relativa às solicitações aplicadas nas fronteiras de Neumann e às condições cinemáticas nas fronteiras de Dirichlet.

Os membros que compõem as estruturas de dados **Edges**, **Loops** e **BConds** são detalhados na secção 4.3.2.

A generalidade e a robustez das estruturas de dados assim criadas concedem-lhes um cariz versátil, permitindo obter de uma forma simples e rápida a informação topológica da malha de elementos e as solicitações aplicadas à mesma. A informação guardada nas mesmas está organizada de maneira a facilitar ainda o esforço computacional, nomeadamente, evitando a necessidade de sucessivas consultas geométricas globais ao modelo.

Conclui-se assim, que as estruturas de dados desenvolvidas procuram manter um carácter geral, que permitirá, no futuro, uma extensão a outro tipo de problemas como análises dinâmicas ou adaptativas.

### Processamento

Nesta etapa o utilizador não tem qualquer interferência, pois traduz o processo de simulação numérica em que o programa, após validar todos os dados inseridos pelo utilizador, calcula os coeficientes do sistema resolutivo que se resolve de seguida, determinando assim a solução do problema.

Inicialmente, o programa aloca espaço a cada sub-matriz (bloco) do sistema resolutivo, guardando o ponto de entrada de cada termo e a respetiva dimensão nas estruturas **Edges** e **Loops**. Depois de mapeado o sistema, os seus coeficientes são calculados recorrendo a técnicas computacionais para a integração numérica (apresentadas em pormenor na secção 4.4.3) e inseridos nos respetivos blocos. Finalizada a construção do sistema, o mesmo é resolvido utilizando pré-condicionadores e *solvers* adaptativos, conforme discutido na secção 4.4.4.

### Pós-processamento

Nesta etapa, o programa reconstrói a solução consoante as definições (3.1) a (3.5), utilizando os coeficientes **q** e **p** estimados na fase anterior, conforme expresso na secção 4.5.1. De seguida, o programa apresenta graficamente os campos das soluções que caracterizam a resposta estrutural às ações impostas. No presente caso, por se tratar da análise de problemas estruturais, os campos representados são os das tensões e dos deslocamentos. Este procedimento é realizado pela rotina *ComputeFields* (referenciada no anexo B) que, para além da representação gráfica, tem a função de criar ficheiros de resultados para posterior processamento utilizando *software* dedicado. É também apresentada, caso o utilizador assim o conceda, a energia de deformação, que tem uma utilidade significativa, apresentada no capítulo 5.

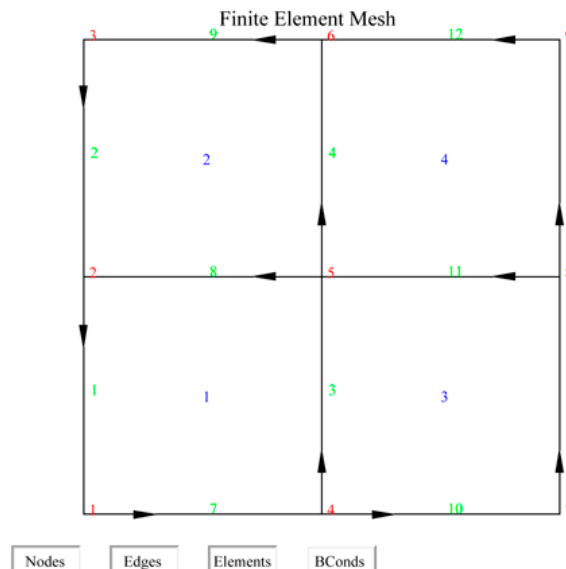
## 4.3 Pré-processamento

### 4.3.1 Dados topológicos

Nesta secção são descritas as duas formas de geração da informação topológica do modelo, nomeadamente, através dos geradores de malha regular e não-regular. As estruturas de dados que resultam do processo de geração de malha são também sucintamente apresentadas. As operações aqui descritas são executadas pela rotina `Input_Proc`.

#### Gerador de malha regular

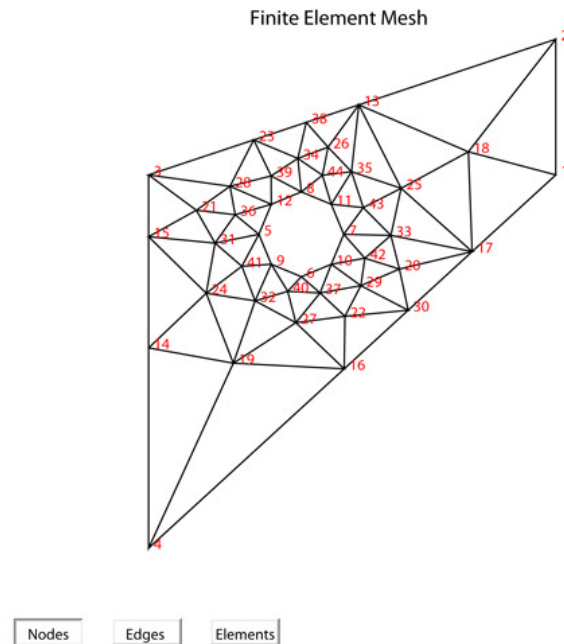
O gerador de malha regular adequa-se à modelação de estruturas de geometria retangular. O utilizador deve definir apenas as dimensões geométricas e o número de elementos finitos em que pretende discretizar a estrutura. Com os dados inseridos pelo utilizador, o programa gera uma malha uniforme de elementos retangulares, como ilustra a figura 4.2. A sua utilização, na ótica do utilizador, é pouco complexa, sendo a malha gerada de forma simples e sem grandes riscos de distorção.



**Figura 4.2:** Gerador de malha regular. Exemplo de malha de 4 elementos e 12 fronteiras. Sentido positivo convencionado para a organização dos dados topológicos do modelo.

#### Gerador de malha não-regular

No gerador de malha não-regular, o utilizador define a geometria da malha a partir de uma interface gráfica incorporada no ambiente Matlab. A forma da estrutura não tem restrições, podendo assumir uma geometria totalmente arbitrária imposta pelo utilizador. Esta geometria é subsequentemente discretizada de forma automática em elementos triangulares, como a apresentada na figura 4.3.



**Figura 4.3:** Gerador de malha não-regular. Exemplo de malha de 68 elementos e 111 fronteiras.

A mesma interface permite ao utilizador definir a dimensão máxima dos elementos a utilizar na malha, o método de geração e garante a opção de refinamento progressivo.

### Dados topológicos

Os dados topológicos resultantes da geração da malha por parte do gerador são apresentados na tabela 4.1 e sucintamente descritos de seguida.

**Tabela 4.1:** Dados topológicos da malha.

Nodes
Loops_nodes
Edges_nodes
Edges_loops
Loops_edges

- **Nodes** : matriz, de dimensão do número total de nós por dois, em que cada linha contém as coordenadas do respetivo nó, no referencial global.
- **Loops\_nodes** : matriz, de dimensão do número total de elementos por quatro ou três, em que cada linha contém os índices dos nós referentes a cada elemento, quatro para elementos retangulares (malha regular) e três para elementos triangulares (malha não-regular). Os nós que compõem cada elemento são organizados no sentido horário.
- **Edges\_nodes** : matriz, de dimensão do número total de fronteiras por dois, em que cada

linha contém os índices dos nós inicial e final referentes a cada fronteira, respeitando as orientações ilustradas na figura 4.2.

- **Edges\_loops** : matriz, de dimensão do número total de fronteiras por dois, em que cada linha contém os índices dos elementos à esquerda e à direita de cada fronteira (se não houver elementos, a entrada correspondente é nula). Esta matriz permite implicitamente ao programa fazer a distinção entre fronteira interior e fronteira exterior, em que caso tenha dois elementos adjacentes define-se como interior, caso tenha apenas um, define-se como exterior. Esta é uma propriedade importante na definição das condições de fronteira, conforme descrito na secção 4.3.2. Ainda de relevar que, seguindo a orientação codificada na matriz **Edges\_nodes** (figura 4.2), as fronteiras têm sempre elemento à esquerda.
- **Loops\_edges** : matriz, de dimensão do número total de elementos por quatro ou três, em que cada linha contém os índices das fronteiras constituintes de cada elemento, quatro para elementos retangulares (malha regular) e três para elementos triangulares (malha não-regular). As fronteiras são organizadas de forma arbitrária pelo programa.

#### 4.3.2 Estruturas de dados

Nesta secção apresentam-se as três estruturas de dados construídas no programa, nomeadamente, as estruturas **Edges**, **Loops** e **BConds**.

##### Estrutura **Edges**

A estrutura **Edges** armazena a informação referente às fronteiras. Na tabela 4.2 está listado o conjunto dos membros que a compõem.

**Tabela 4.2:** Estrutura de dados **Edges**.

<b>Edges</b>	<b>Edges.nini</b>
	<b>Edges.nfin</b>
	<b>Edges.parametric</b>
	<b>Edges.lleft</b>
	<b>Edges.lright</b>
	<b>Edges.type</b>
	<b>Edges.order</b>
	<b>Edges.insert</b>
	<b>Edges.dim</b>

Procede-se de seguida à apresentação dos membros constituintes da estrutura **Edges**.

- **Edges.nini** : vetor, de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo contém o índice do nó inicial da fronteira respeitando a orientação definida pelo gerador de malha (figura 4.2).

- **Edges.nfin** : vetor, de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo contém o índice do nó final da fronteira respeitando a orientação definida pelo gerador de malha (figura 4.2).
- **Edges.parametric** : matriz, de dimensão do número total de fronteiras por quatro, em que cada linha contém os dados geométricos de cada fronteira,  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , respectivamente. As duas primeiras colunas,  $X_0$  e  $Y_0$ , definem as coordenadas Cartesianas globais do nó inicial, respectivamente, e as duas últimas,  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , as distâncias em  $x$  e  $y$  entre os nós inicial e final da fronteira.
- **Edges.lleft** : vetor, de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo contém os índices dos elementos situados à esquerda da fronteira. Conforme referido na apresentação da matriz **Edges\_loops**, a organização topológica do modelo define a existência obrigatória de um elemento à esquerda de cada fronteira.
- **Edges.lright** : vetor, de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo contém os índices dos elementos situados à direita da fronteira. Se não houver elemento à direita da fronteira (ou seja, se a fronteira for exterior), a respetiva entrada é nula.
- **Edges.type** : vetor, de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo contém o carácter 'N' ou 'D' consoante o tipo de fronteira que o utilizador define, Neumann ou Dirichlet, respetivamente. As fronteiras interiores são tratadas pelo algoritmo como sendo fronteiras de Dirichlet, logo devem ser definidas como tal. O utilizador deve definir de forma condizente o tipo da fronteira e as condições impostas na mesma, pois caso contrário o programa identifica a situação e interrompe a execução. Por exemplo, se o utilizador pretende introduzir um carregamento aplicado a uma fronteira, deverá defini-la como fronteira de Neumann e de seguida aplicar o carregamento.
- **Edges.order** : vetor, de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo contém o grau máximo dos polinómios que constam da base de aproximação da respetiva fronteira.
- **Edges.insert** : matriz, de dimensão igual ao número total de fronteiras por dois, em que cada linha contém os pontos de entrada da matriz **B** da fronteira no sistema (3.50), nas suas direções normal e tangencial à fronteira.
- **Edges.dim** : matriz, de dimensão igual ao número total de fronteiras por dois, em que cada linha contém as respetivas dimensões dos polinómios da base de aproximação da matriz **B** nas fronteiras, nas suas direções normal e tangencial.

Os termos **Edges.type** e **Edges.order** são pré-definidos no início da execução, por simplificação ou prevenção de eventuais lapsos na introdução dos dados por parte do utilizador. Assim, como o tipo de fronteira predominante é a fronteira do tipo Dirichlet, todas as fronteiras da malha estão pré-definidas como fronteiras Dirichlet. Então, o utilizador apenas tem de definir



as fronteiras em que pretende aplicar carregamentos (fronteiras de Neumann ou estáticas). Por outro lado, em **Edges.order**, os graus dos polinómios da base de aproximação estão definidos por defeito como *not a number* (NaN).

### Estrutura Loops

A estrutura **Loops** armazena a informação referente aos elementos. Na tabela 4.3 está listado o conjunto dos membros que a compõem.

**Tabela 4.3:** Estrutura de dados **Loops**.

<b>Loops</b>	<b>Loops.nodes</b>
	<b>Loops.edges</b>
	<b>Loops.center</b>
	<b>Loops.area</b>
	<b>Loops.order</b>
	<b>Loops.materials</b>
	<b>Loops.insert</b>
	<b>Loops.dim</b>

Procede-se de seguida à apresentação dos membros constituintes da estrutura **Loops**.

- **Loops.nodes** : matriz, idêntica à matriz topológica **Loops\_nodes** devolvida pelo gerador de malha.
- **Loops.edges** : matriz, idêntica à matriz topológica **Loops\_edges** devolvida pelo gerador de malha.
- **Loops.center** : matriz, de dimensão igual ao número total de elementos por dois, em que cada linha contém a localização do respetivo centróide relativamente aos eixos coordenados  $X$  e  $Y$  (referencial global). Define a origem do referencial local do elemento.
- **Loops.area** : vetor, de dimensão igual ao número total de elementos, em que cada termo contém a área do respetivo elemento.
- **Loops.order** : vetor, de dimensão igual ao número total de elementos, em que cada termo define a ordem máxima das funções de aproximação da base dos deslocamentos no domínio, a introduzir pelo utilizador.
- **Loops.materials** : matriz, de dimensão igual ao número de total de elementos por cinco, em que cada linha contém os parâmetros capazes de definir o comportamento mecânico do material constituinte do modelo. Cada linha contém os valores dos parâmetros,  $\nu$ ,  $E$ ,  $k_{11}$ ,  $k_{12}$  e  $k_{33}$ , correspondendo aos coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade e aos termos da matriz de rigidez do material da equação (2.19) ou da equação (2.20), conforme descrito na secção 2.3.1, consoante o tipo de problema que se esteja a resolver. Os termos  $k_{11}$ ,  $k_{12}$  e

$k_{33}$  são calculados automaticamente pelo programa em função do estado plano (isto é, de tensão ou de deformação) definido pelo utilizador, ainda no ficheiro de *input*.

- **Loops.insert** : matriz, de dimensão igual ao número total de elementos por cinco, em que cada linha contém os pontos de entrada de cada bloco da matriz de rigidez **K** do respetivo elemento.
- **Loops.dim** : matriz, de dimensão igual ao número total de elementos por cinco, em que cada linha contém as dimensões de cada bloco da matriz de rigidez **K** do respetivo elemento.

### Estrutura **BConds**

A estrutura **BConds** armazena a informação referente às fronteiras. Na tabela 4.4 está listado o conjunto dos membros que a compõem.

**Tabela 4.4:** Estrutura de dados **BConds**.

<b>BConds</b>	<b>BConds.Neumann</b>
	<b>BConds.Dirichlet</b>

Procede-se de seguida à apresentação dos termos constituintes da estrutura **BConds**.

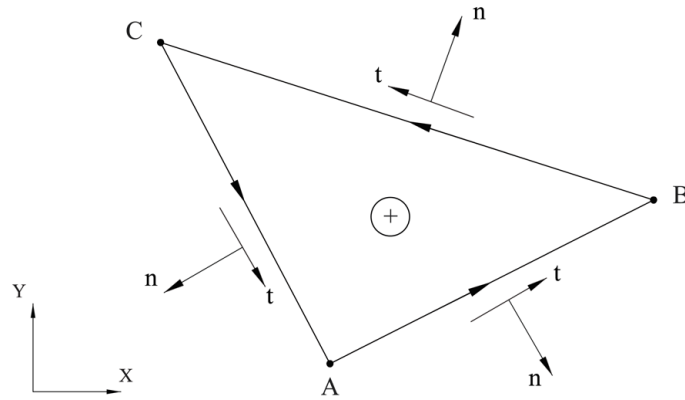
- **BConds.Neumann** : *cell array*, de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada linha armazena as solicitações externas aplicadas nas fronteiras de Neumann nas direções normal e tangencial relativas às respetivas fronteiras. As entradas correspondentes às fronteiras que não sejam de Neumann contém *NaN*.
- **BConds.Dirichlet** : *cell array*, de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada linha armazena os deslocamentos impostos nas fronteiras de Dirichlet nas direções normal e tangencial relativas às respetivas fronteiras. As entradas correspondentes às fronteiras que não sejam de Dirichlet contém *NaN*.

Conforme especificado na apresentação do membro *'type'* da estrutura **Edges**, a definição da condição de fronteira deve ser coerente com a natureza da mesma.

Conhecidos os referenciais apresentados na secção 4.2.1, importa perceber de que forma o utilizador especifica as condições de fronteira. Para tal representa-se na figura 4.4 o sentido positivo convencionado para os carregamentos e para os deslocamentos impostos nas fronteiras, para um elemento triangular.

As condições de fronteira são aplicadas, no referencial normal-tangencial à fronteira  $(n, t)$ , para o processo envolvido na introdução dos dados apresentar uma maior simplicidade. Estas são definidas pelo utilizador de forma independente nas suas componentes normal e tangencial na fase do pré-processamento por polinómios de grau arbitrário, controlados pela inserção dos valores dos respetivos campos em pontos equidistantes. Esses valores são interpolados pelo programa que gera o respetivo polinómio de grau  $N - 1$ , sendo  $N$  o número de valores especificados. Para

um exemplo prático da definição das condições de fronteira, o leitor é referenciado para o anexo D.



**Figura 4.4:** Convenção positiva dos sinais para especificar as condições de fronteira.

#### 4.3.3 Outras definições

Introduzidas as condições de fronteira do problema, o utilizador precisa de definir o número de pontos de Gauss-Legendre para a integração nas fronteiras, e o número de pontos em que quer dividir o domínio para a representação gráfica dos campos de tensão e deslocamento.

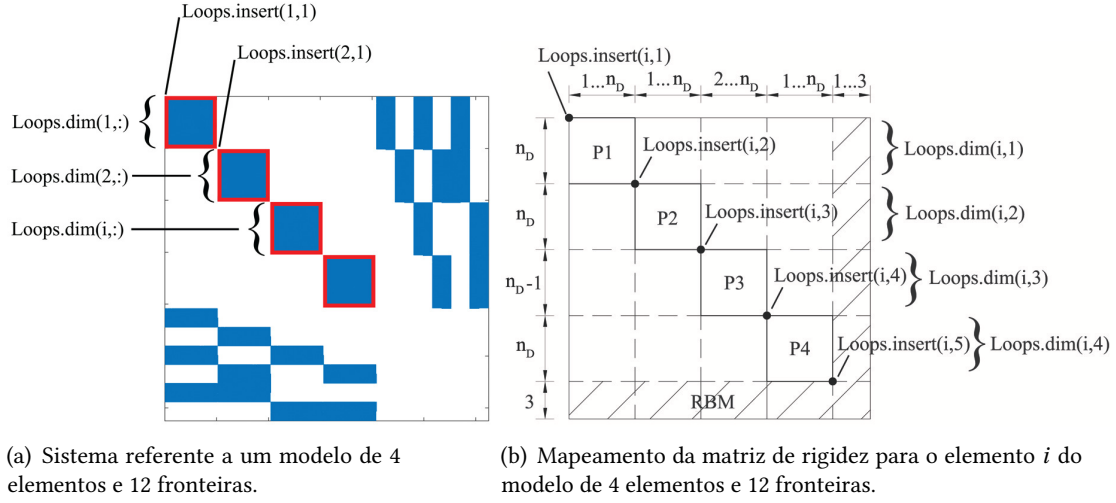
Completa a fase do pré-processamento, os dados são submetidos ao processo de análise dos mesmos. Esta fase é descrita na secção seguinte.

### 4.4 Processamento

#### 4.4.1 Mapeamento do sistema

Terminada a fase de introdução de dados por parte do utilizador, o programa utiliza as informações armazenadas nas estruturas de dados, para realizar o mapeamento do sistema resolutivo com o objetivo de alocar a memória necessária e suficiente a cada bloco e de inserir cada bloco na posição correta. O mapeamento do sistema é realizado através da função `AssignParts` (referenciada no anexo B). Nesta função definem-se os pontos de entrada para cada elemento e fronteira essencial no sistema resolutivo, tal como as dimensões dos blocos que lhes são associados.

Apresenta-se a figura 4.5 a), representativa da parte do sistema resolutivo referente à matriz de rigidez dos elementos constituintes da malha e pormenorizada na figura 4.5 b) de forma a ilustrar a maneira como o programa define, através dos membros *'insert'* e *'dim'* da estrutura **Loops**, os pontos de entrada referentes aos blocos que compõem a matriz de rigidez do elemento genérico  $i$ . O programa calcula, ao nível de cada elemento, a dimensão dos blocos da matriz de rigidez, em função da ordem das funções de aproximação  $n_D$ , definida na matriz **Loops.order**. As parcelas  $P1$  a  $P4$  representadas na figura 4.5, representam os modos de deslocamento das bases  $\Psi_h$  e  $\Psi_b$  com as suas dimensões, respetivamente, e os modos de corpo rígido (RBM) da base  $\Psi_r$ , conforme o descrito na secção 3.3.6.



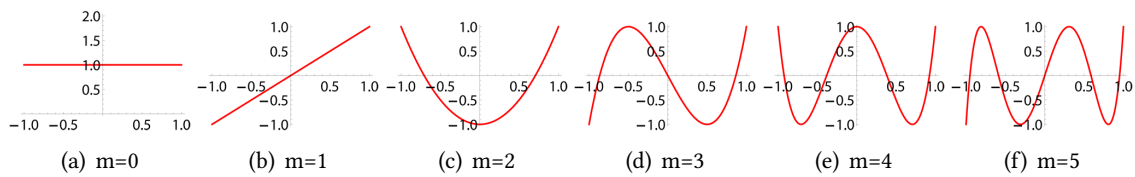
**Figura 4.5:** Mapeamento do sistema de um modelo de 4 elementos e 12 fronteiras encastrado nas fronteiras 1 e 2 e livre nas restantes de acordo com a geometria e orientação apresentadas na figura 4.2.

Na parte das fronteiras é seguido um procedimento análogo ao adotado no domínio. São utilizadas funções polinomiais de Chebyshev nas fronteiras essenciais para a construção da base  $\mathbf{Z}$  presente na definição (3.5). Os polinômios de Chebyshev são expressos por,

$$Z_m(s) = \cos[m \arccos(s)] \quad (4.1)$$

com  $m = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  e sendo  $s \in [-1, 1]$ , a coordenada da fronteira essencial onde estas funções de aproximação estão definidas.

Optou-se pela utilização dos polinômios de Chebyshev (exemplificados na figura 4.6) devido à sua estabilidade numérica e ao facto de formarem uma base completa no intervalo  $[-1, 1]$ .



**Figura 4.6:** Polinômios de Chebyshev de grau 0 a 5.

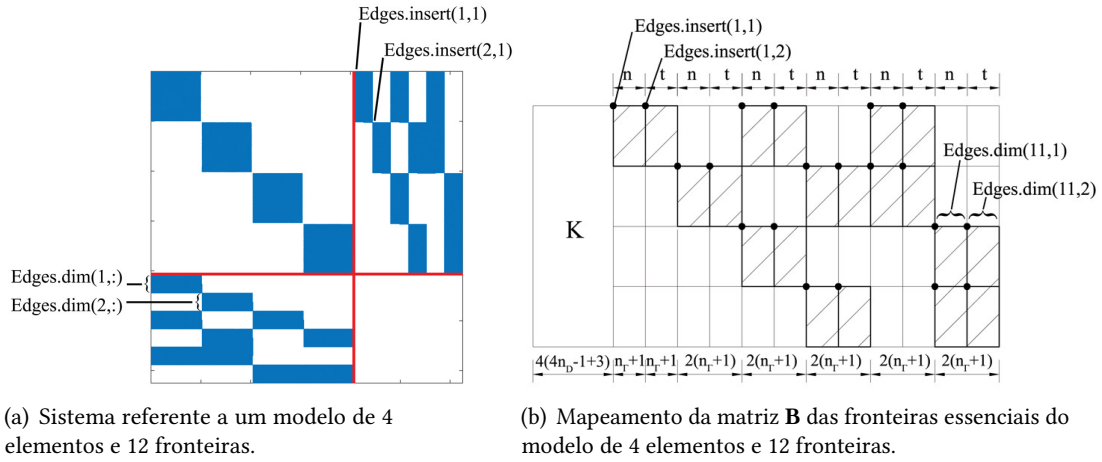
Como abordado na secção 4.3, a definição das condições de fronteira é feita de forma independente nas direções normal e tangencial à fronteira. Da mesma forma, o programa expressa a aproximação do campo das forças nas fronteiras essenciais de forma independente nas mesmas direções assumindo assim a base  $\mathbf{Z}$  a forma,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_t \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Apesar da definição das bases de aproximação  $\mathbf{Z}_n$  e  $\mathbf{Z}_t$  ser completamente independente nas direções normal e tangencial à fronteira, respetivamente, o mesmo grau (especificado pelo

utilizador e guardado no membro ‘*order*’ da estrutura **Edges**) é utilizado na versão atual do programa, isto é,  $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_t$ . No entanto, é importante referir que a aproximação numa direção pode faltar por completo se as forças que ocorrem na respetiva direção forem conhecidas. Um caso típico é a presença de um encastramento deslizante, onde as forças na direção tangencial são conhecidas.

Assim, e de forma consistente com a definição (4.2), nos membros ‘*insert*’ e ‘*dim*’ da estrutura **Edges**, o programa regista os pontos de entrada dos blocos das matrizes **B**, referentes às fronteiras essenciais. A figura 4.7 a) apresenta a parte do sistema resolutivo referente às fronteiras, pormenorizada de seguida na figura 4.7 b), para ilustrar a maneira como o programa define os pontos de entrada referentes às componentes normal e tangencial que compõem a matriz **B** do modelo.



**Figura 4.7:** Mapeamento das fronteiras essenciais nas suas componentes normal e tangencial de um modelo de 4 elementos e 12 fronteiras encastrado nas fronteiras 1 e 2 e livre nas restantes de acordo com a geometria e orientação apresentadas na figura 4.2.

#### 4.4.2 Indeterminação cinemática

Sabendo a ordem das funções e os graus dos polinómios das bases de aproximação que o utilizador define ao nível de um determinado elemento (domínio) e nas suas fronteiras essenciais, pretende-se satisfazer a condição de indeterminação cinemática (3.52) de modo a evitar o sobrecondicionamento do elemento e as respetivas dependências no sistema resolutivo.

A condição de indeterminação cinemática é imposta ao nível do elemento, garantindo desta forma o seu cumprimento também ao nível estrutural. A satisfação da condição (3.52) tem de ser feita pela escolha da ordem das funções e do grau dos polinómios das bases de aproximação no domínio e nas fronteiras do elemento, respetivamente.

Assim, e fazendo as notações  $N_D$  e  $n_D$  para o número total de funções de aproximação incluídas na base do domínio e a ordem máxima das mesmas, respetivamente, a dimensão da base

é dada pela expressão,

$$N_D = 4n_D - 1 + 3 \quad (4.3)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para a aproximação das forças numa determinada direção de uma fronteira essencial, com  $N_\Gamma$  e  $n_\Gamma$  a representarem, respetivamente, o número total de polinómios e o respetivo grau de aproximação, resulta que,

$$N_\Gamma = n_\Gamma + 1 \quad (4.4)$$

Assumindo que o mesmo grau de aproximação é utilizado em todas as fronteiras essenciais do elemento considerando, a condição de indeterminação cinemática (3.52) escreve-se como,

$$N_D \geq n_s N_\Gamma \quad (4.5)$$

onde  $n_s$  representa o número de aproximações realizadas em todas as fronteiras essenciais do elemento. O caso mais condicionante da expressão (4.5) corresponde, na versão atual do programa, a um elemento retangular com  $n_s = 8$  forças aproximadas. Para este caso, as bases de aproximação no domínio e na fronteira devem ser escolhidas de maneiras que  $n_D \geq 2n_\Gamma$ .

Para uma melhor compreensão da diferença da imposição da condição de indeterminação cinemática ao nível do elemento e da estrutura, remete-se o leitor ao anexo D que ilustra um exemplo de aplicação prática.

#### 4.4.3 Integração numérica

O processo de cálculo dos integrais na aplicação de formulações de elementos finitos, por norma, recorre a técnicas de integração numérica também designadas por quadraturas, uma vez que não é geralmente viável a determinação do valor do integral de forma analítica.

Para o caso, o cálculo dos integrais que definem os coeficientes do sistema resolutivo (3.50) (antecedido por eventuais compatibilizações de sistemas de referência caso a situação assim o justifique), é feito através da aplicação da regra de quadratura de Gauss-Legendre. Desta forma, o cálculo do integral é reduzido a uma soma ponderada dos valores da função a integrar, em determinados pontos críticos pertencentes ao domínio de valores da função.

Para realizar esta integração, todos os domínios são mapeados para o intervalo  $[-1, 1]$ . O valor  $I$  do integral de uma função genérica  $f(s)$  definida no referencial da fronteira é calculado através da expressão,

$$I = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 f(s) ds = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n W_i(a_i) f(a_i) \quad (4.6)$$

onde  $L$  é o comprimento da fronteira que representa o domínio da integração,  $n$  é o número total dos pontos de Gauss-Legendre,  $a_i$  são as abscissas que correspondem a esses pontos e  $W_i$  os respetivos pesos [67, 68].

A quadratura de Gauss-Legendre, produz um resultado exato com  $n$  pontos de amostragem para polinómios de grau  $2n - 1$  ou inferior.



pretende é uniformizar o valor dos pivôs do sistema a um valor unitário, sem comprometer, no entanto, a simetria do mesmo. Esta operação é efetuada antes do processo de pivoteamento, com o objetivo de reduzir o número de condição do sistema. De forma a preservar a simetria do sistema, os fatores de escala afetam a matriz dos coeficientes, o vetor das soluções e o vetor livre do sistema.

Posteriormente à aplicação do pré-condicionador, o programa verifica novamente o condicionamento do sistema. Na situação em que o número de condição resulte novamente superior à inversa da precisão da máquina, o utilizador tem a possibilidade de optar por uma das seguintes soluções,

- Melhorar o respetivo número de condição, redefinindo a estrutura e refinando o modelo através da alteração de certos parâmetros, como o aumento do número de elementos da malha e a diminuição da ordem das funções das bases de aproximação que os compõem.
- Prosseguir com o programa, assumindo o risco de obtenção de um resultado menos conseguido, resolvendo o sistema através de um *solver* especial (descrito em baixo).

No caso do sistema ser bem condicionado, a sua resolução é feita utilizando o *solver* adaptativo *mldivide* incluído no Matlab. Este *solver* aplica procedimentos numéricos e algoritmos diferentes para resolver diferentes tipos de sistemas. Assim, a resolução do sistema (3.50) faz-se através de um procedimento numérico ou outro em função das características da matriz dos coeficientes. A gama de procedimentos utilizados abrange desde a utilização de *solvers* mais simples, como *solvers* triangulares, até à utilização de *solvers* mais complexos como *solvers QR*.

No caso em que o número de condição resulte superior à inversa da precisão da máquina e o utilizador prossiga com o programa (utilizando *solvers* especiais), a qualidade dos resultados do problema pode ficar aquém do desejado. Para minimizar o risco desta situação acontecer, optou-se pela utilização de um *solver* baseado no cálculo da pseudo-inversa da matriz dos coeficientes, que garante a eliminação dos valores singulares muito próximos de zero. Para além da solução obtida não ser necessariamente a correta, o cálculo da pseudo-inversa tem um custo computacional muito superior ao que corresponde à utilização de um *solver* convencional.

## 4.5 Pós-processamento

### 4.5.1 Campos de soluções

A solução do sistema resolutivo (3.50) fornece uma única estimativa para o campo dos deslocamentos, no domínio e nas fronteiras. Este campo é obtido partindo da aproximação dos deslocamentos (3.1),

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{q} = \{\Psi_h, \Psi_b, \Psi_r\} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_h \\ \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_r \end{Bmatrix} = \Psi_h \mathbf{q}_h + \Psi_b \mathbf{q}_b + \Psi_r \mathbf{q}_r \quad (4.7)$$



Fica igualmente definida uma estimativa única para o campo das tensões no domínio dos elementos, através da aproximação (3.4),

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{q} \quad (4.8)$$

No entanto, a formulação produz duas estimativas independentes para as forças nas fronteiras essenciais, uma obtida através da projeção do campo de tensões (4.8) nas direções normal e tangencial à fronteira, e outra através da aproximação independente (3.5). As duas estimativas devem convergir quando as soluções são suficientemente refinadas, podendo a sua diferença ser, eventualmente, utilizável como medida de convergência.

#### 4.5.2 Energia de deformação

A energia de deformação é definida pela equação,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.9)$$

Utilizando as condições de compatibilidade (3.3) e de elasticidade (3.4), através da aproximação dos campos de deslocamentos (3.1), a estimativa da energia de deformação obtida pelo método dos elementos finitos resulta em,

$$U_{EF} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \int_V (\mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi})^T \mathbf{k} (\mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi}) dV \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4.10)$$



## Capítulo 5

# Resultados e discussão

### 5.1 Introdução

No presente capítulo, o programa desenvolvido através do processo algorítmico descrito no capítulo anterior é validado e aplicado à resolução de vários problemas, com o principal objetivo de avaliar o seu desempenho.

Com base nos testes apresentados, procede-se à avaliação da convergência dos elementos híbridos de Trefftz sob refinamentos ' $p$ ' e ' $h$ ', através da comparação dos resultados obtidos no presente trabalho com soluções analíticas, resultados apresentados por outros investigadores, ou obtidos com programas de cálculo automático que utilizam elementos conformes de deslocamento e outros tipos de elementos híbridos-Trefftz. A influência do refinamento ' $h$ ', faz-se notar no processo de aumento do número dos elementos da malha. A influência do refinamento ' $p$ ' obtém-se através do aumento da ordem das bases de aproximação, nomeadamente, no domínio e nas fronteiras essenciais. De notar que, para todos os modelos estudados através da adoção do refinamento do tipo ' $p$ ', a ordem atribuída às funções de aproximação no domínio e dos graus dos polinómios nas fronteiras é feita de modo a assegurar um sistema estática e cinematicamente indeterminado.

A utilização do MEF para a obtenção de uma estimativa da solução de um problema real induz naturalmente uma diferença entre a realidade física do problema e a idealização da mesma, o erro. Este erro pode ter origens distintas, podendo ser classificado da seguinte maneira:

- Erro proveniente da modelação do problema;
- Erro proveniente da discretização do modelo;
- Erro proveniente da escolha das funções de aproximação;
- Erro de precisão numérica.

Os erros de modelação são derivados da idealização do modelo físico a nível matemático. Neste tipo de erro, a reprodução virtual da realidade física do problema através de um modelo matemático baseia-se em certas hipóteses simplificativas que não reproduzem, em regra geral, o

comportamento real do modelo físico por variadas razões, como por exemplo, por as propriedades dos materiais e condições de fronteira não corresponderem perfeitamente às idealizadas, ou por as equações utilizadas não terem em consideração a totalidade dos efeitos relevantes à modelação do problema.

Os erros de discretização do modelo, decorrem do processo de divisão do domínio contínuo em subdomínios discretos. Uma malha mal discretizada pode levar à obtenção de uma estimativa grosseira da solução (refinamento ' $h$ ' insuficiente).

Os erros resultantes da escolha das funções de aproximação devem-se ao facto das bases de aproximação não conterem, em geral, a solução exata do modelo matemático adotado. Se as bases de aproximação forem construídas utilizando funções de aproximação que estejam muito diferentes da solução do problema, diz-se que estamos perante um refinamento ' $p$ ' insuficiente. Conforme o descrito na secção 3.3.1, o aumento do refinamento do tipo ' $p$ ' na formulação híbrida-Trefftz apenas requer acrescentar novas funções às bases (hierárquicas) de aproximação, sem haver necessidade de recalcular as anteriores. Esta propriedade revela-se numa grande vantagem na utilização desta formulação, principalmente por estar aliada a uma taxa de convergência elevada, fazendo com que o refinamento ' $p$ ' seja o refinamento primordial na sua utilização prática.

Os erros de precisão numérica ocorrem devido a processos utilizados na resolução numérica do modelo, por exemplo, através da indução de erros de integração numérica nos coeficientes do sistema resolutivo ou no processo de resolução do mesmo sistema. Conforme o descrito na secção 4.4.4, a precisão computacional é limitada e, portanto, os resultados obtidos numericamente terão associados erros de truncatura, agravados pelo aumento dos graus de liberdade. Assim, no presente trabalho, de maneira a potencializar um melhor condicionamento do sistema resolutivo, utilizam-se para as aproximações nas fronteiras bases polinomiais de Chebyshev. Por outro lado, para garantir uma maior precisão no processo da integração numérica nas fronteiras, utiliza-se um número suficientemente elevado de pontos de integração de Gauss-Legendre (10 pontos por fronteira).

Ao longo deste capítulo, dá-se especial atenção aos erros provenientes da discretização do modelo (refinamento ' $h$ ') e da qualidade das funções de aproximação utilizadas (refinamento ' $p$ '). A análise destes erros permite avaliar o desempenho da formulação desenvolvida, quando aplicada a situações de diversos graus de complexidade.

Inicialmente, realiza-se o processo de validação do programa, onde se estuda um problema com solução analítica conhecida, que não está, no entanto, incluída na base de aproximação do domínio dos elementos híbridos-Trefftz. Para este caso, estima-se o erro relativo da solução obtida com elementos híbridos-Trefftz (secção 5.2.2) e avalia-se o desempenho dos mesmos elementos em comparação com os elementos conformes de deslocamento implementados num *software* comercial (secção 5.2.3).

Apresentam-se, de seguida, três casos de estudo de maior nível de complexidade. Para o primeiro caso, uma placa em forma de 'L', apresentado na secção 5.3.1, a avaliação da convergência e qualidade da solução faz-se através da análise do erro da energia de deformação. Para o segundo caso, o painel de Cook, apresentado na secção 5.3.2, comparam-se os resultados obtidos com o programa de elementos finitos híbridos-Trefftz (EFHT) desenvolvido no presente trabalho com os

resultados obtidos por um programa que utiliza elementos finitos convencionais. Relativamente ao último caso de estudo, uma placa com orifício circular, apresentado na secção 5.3.3, efetua-se uma análise de convergência da energia de deformação, comparando os resultados obtidos utilizando o programa de EFHT com um outro programa que utiliza elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão e ainda com um programa que utiliza elementos finitos convencionais.

## 5.2 Validação do programa

Antes de utilizar o programa descrito no capítulo 4 para a resolução de problemas com graus de complexidade mais elevados, procede-se à validação do funcionamento do mesmo num problema relativamente simples, com solução analítica conhecida.

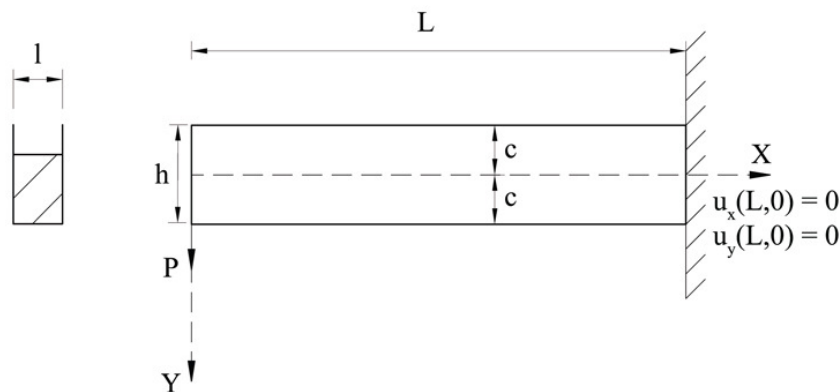
A validação contempla dois processos distintos apresentados ao longo desta secção:

- Validação dos resultados obtidos utilizando o programa de EFHT com uma solução analítica conhecida, apresentada por S. Timoshenko [63].
- Comparação dos resultados obtidos utilizando o programa de EFHT com os obtidos pelo programa de cálculo automático SAP2000, que utiliza elementos conformes de deslocamento.

### 5.2.1 Viga de Timoshenko

O processo de validação visa comparar a solução obtida pelo programa de EFHT na análise de uma viga em consola sujeita a um carregamento na sua extremidade livre (figura 5.1) com a solução analítica obtida por S. Timoshenko [63].

A viga tem comprimento  $L$ , largura  $b = 1$  e altura  $h = 2c$ , sendo encastrada na fronteira  $X = L$ , e sujeita a um estado de tensão plana provocado por uma carga tangencial  $P$  aplicada na fronteira  $X = 0$ .



**Figura 5.1:** Viga de Timoshenko. Adaptado de [63].

Conforme apresentado por S. Timoshenko [63], as expressões analíticas dos campos para a situação ilustrada na figura 5.1, e tomadas como referência para o processo de comparação com

as soluções obtidas pelo programa desenvolvido, são, para o campo de tensões,

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{3}{2} \frac{P}{c^3} xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \end{cases} \quad (5.1)$$

para o campo de deformações,

$$\begin{cases} \epsilon_x = -\frac{Pxy}{EI} \\ \epsilon_y = \frac{\nu Pxy}{EI} \\ \gamma_{xy} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2) \end{cases} \quad (5.2)$$

onde  $I = \frac{bh^3}{12}$  e  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , e para o campo de deslocamentos,

$$\begin{cases} u_x = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}\right)y \\ u_y = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \end{cases} \quad (5.3)$$

As expressões (5.3) foram obtidas admitindo que os deslocamentos estão impedidos no eixo central da viga na extremidade  $X = L$ , e que,

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{\substack{X=L \\ Y=0}} = 0 \quad (5.4)$$

É importante observar que os campos de tensões analíticas (5.1) não correspondem, na realidade, à aplicação de uma carga  $P$  concentrada. Na secção  $X = 0$ , a tensão tangencial tem uma variação parabólica, sendo nula em  $Y = \pm c$  e tendo a resultante igual a  $P$ . Do mesmo modo, os campos de deslocamentos em  $X = L$  não correspondem, efetivamente, a um encastramento, tendo a variação representada na figura 5.2. No entanto, de acordo com o princípio de St. Venant, as soluções (5.1) a (5.3) aproximam com suficiente precisão a solução de uma viga encastrada a uma distância suficientemente grande das extremidades ( $X = 0$  e  $X = L$ ) da viga.

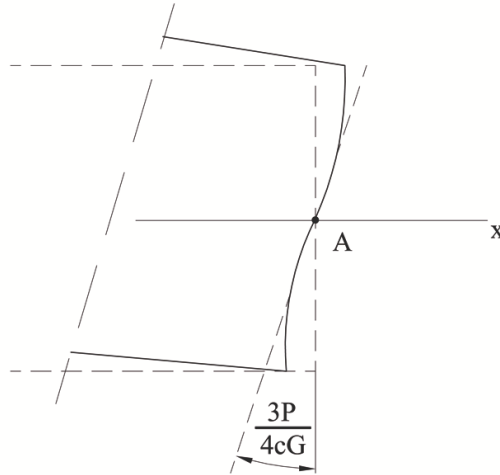
Para o caso em estudo, os resultados numéricos foram obtidos considerando os parâmetros geométricos  $L = 10$ ,  $c = 1$  e  $h = 2$ , o carregamento  $P = 10$  e os parâmetros do material  $E = 30$  e  $\nu = 0.2$ .

Conforme apresentado no capítulo 4, conhecendo a solução do campo das tensões e das deformações, consegue-se determinar o valor exato da energia de deformação  $U_E$ . Aplicando a definição (4.9), obtém-se o valor da energia de deformação exata do problema, traduzido por,

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = 857. (3) \quad (5.5)$$

### 5.2.2 Validação com a solução analítica

A comparação entre a solução analítica do problema e a solução obtida através da utilização do programa desenvolvido é feita utilizando uma medida do erro da energia de deformação.



**Figura 5.2:** Viga de Timoshenko: Deformação da viga em  $X = L$ . Adaptado de [63].

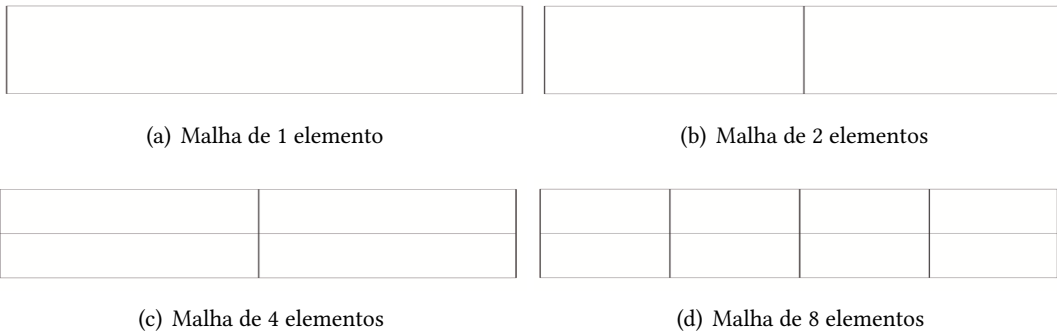
O erro da energia de deformação é definido pela expressão,

$$E_U = \left| 1 - \frac{U_{HT}}{U_E} \right| \quad (5.6)$$

onde  $U_E$  é a solução exata (5.5) e  $U_{HT}$  a solução obtida pelos elementos finitos híbridos-Trefftz.

No modelo em estudo, aplica-se um campo de deslocamentos na extremidade  $X = L$  da viga, traduzido pela expressão (5.3), e aplica-se ainda uma carga parabólica de resultante  $P = 10$  na extremidade livre, em  $X = 0$ .

Para a avaliação do erro utilizam-se 4 níveis de refinamento ' $h$ ', correspondendo a 1, 2, 4 e 8 elementos, conforme representado na figura 5.3 e listado na legenda da figura 5.4.



**Figura 5.3:** Viga de Timoshenko: Malhas utilizadas no programa de EFHT.

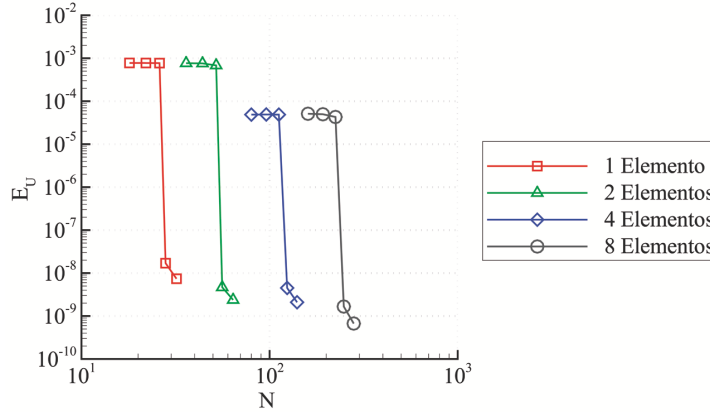
O refinamento ' $p$ ' foi controlado através da variação das ordens das funções no domínio ( $n_D$ ) e dos graus dos polinômios nas fronteiras ( $n_T$ ). As ordens e os graus utilizados no refinamento ' $p$ ' para as bases no domínio e fronteiras essenciais são os indicados na tabela 5.1. As mesmas bases de aproximação foram utilizadas em todos os elementos e fronteiras essenciais.

Apresenta-se na figura 5.4 um gráfico que avalia a convergência da energia de deformação através da análise do erro (5.6). O erro ( $E_U$ ) é determinado para os refinamentos ' $h$ ' e ' $p$ ' acima

descritos e representado na figura 5.4 em função do número total de graus de liberdade ( $N$ ) de cada modelo. Ambos os eixos estão representados em escala logarítmica.

**Tabela 5.1:** Viga de Timoshenko: Refinamentos ' $p$ ' utilizados.

$n_D$	3	4	5	5	6
$n_\Gamma$	1	1	1	2	2



**Figura 5.4:** Viga de Timoshenko: Erro da energia de deformação ( $E_U$ ) em função do número total de graus de liberdade ( $N$ ).

Através da análise do gráfico da figura 5.4, é possível concluir que para as ordens  $n_D$  e graus  $n_\Gamma$  das bases de aproximação utilizadas, o erro relativo diminui à medida que o modelo é refinado. Verifica-se ainda que a utilização do refinamento do tipo ' $p$ ' permite uma convergência mais rápida que a utilização do refinamento do tipo ' $h$ '. Este fator acentua-se com o aumento do grau das bases polinomiais da fronteira, em que para  $n_\Gamma = 2$  a solução é recuperada com um elevado grau de precisão, sendo que a solução obtém a sua melhor estimativa para o modelo de 8 elementos com  $n_D = 6$  e  $n_\Gamma = 2$ , observando-se um erro relativo muito reduzido (aproximadamente  $6.69 \times 10^{-10}$ ). Assim, recuperam-se as condições de fronteira na zona do encastramento com um elevado grau de precisão, bem como a continuidade cinemática interelementar. As condições de fronteira estáticas também são recuperadas, bem como a continuidade do campo de tensões, entre todos os elementos da malha.

Então, sendo capaz de recuperar uma boa estimativa da solução para o exemplo apresentado, conclui-se que o programa de EFHT encontra-se validado.

### 5.2.3 Comparação do modelo de EFHT com elementos finitos convencionais

Concluído o processo de validação do programa desenvolvido, procede-se à comparação entre os desempenhos dos EFHT e dos elementos finitos conformes de deslocamento (convencionais).

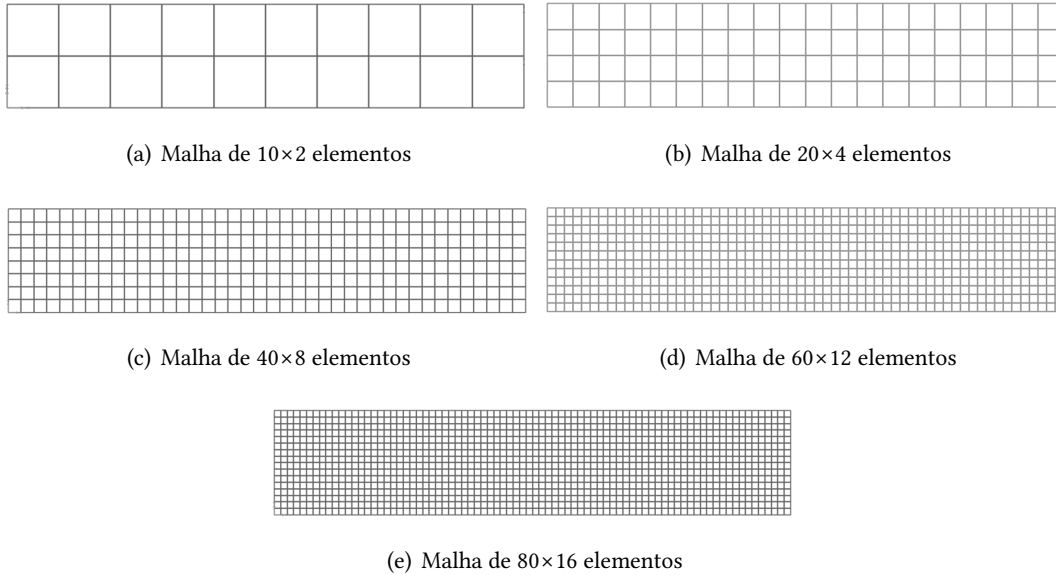
Esta comparação realiza-se através da análise dos campos de tensões e de deslocamentos obtidos em dois pontos da secção mediana para uma versão simplificada do problema da viga de Timoshenko (figura 5.1), na qual a distribuição dos deslocamentos impostos na fronteira  $X = L$  é



substituída pelas condições próprias a um encastramento puro ( $u_{xX=L} = 0$  e  $u_{yX=L} = 0$ ). Esta simplificação é justificada pela dificuldade da imposição das condições de fronteira de deslocamentos expressos por polinómios de grau superior no programa SAP2000.

O modelo de EFHT é composto por uma malha de 8 elementos, igual ao apresentado na figura 5.3 d). O modelo define a carga parabólica aplicada em  $X = 0$  de forma exata, conforme descrito na secção 4.3.2. A este modelo foram aplicados os níveis de refinamento ' $p$ ', listados na legenda da figura 5.7, variando as ordens e os graus atribuídos às bases de aproximação no domínio e nas fronteiras, respetivamente, de  $n_D = 3$  e  $n_\Gamma = 0$  a  $n_D = 11$  e  $n_\Gamma = 4$ .

O modelo de elementos finitos convencionais define a carga parabólica aplicada em  $X = 0$  através de uma carga uniforme equivalente de resultante  $P$ . Este modelo é afetado pelos níveis de refinamento ' $h$ ' apresentados na figura 5.5 e listados na legenda da figura 5.7.



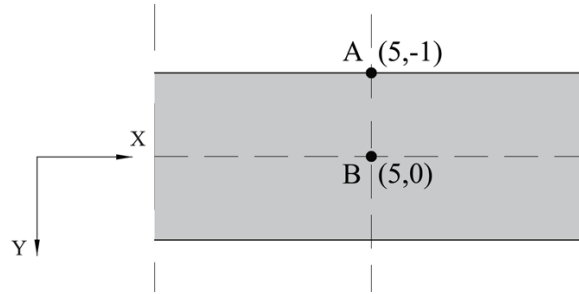
**Figura 5.5:** Viga de Timoshenko: Malhas utilizadas no programa SAP2000.

De referir que o modelo de elementos finitos convencionais utiliza elementos finitos de 4 nós e funções de aproximação bi-lineares.

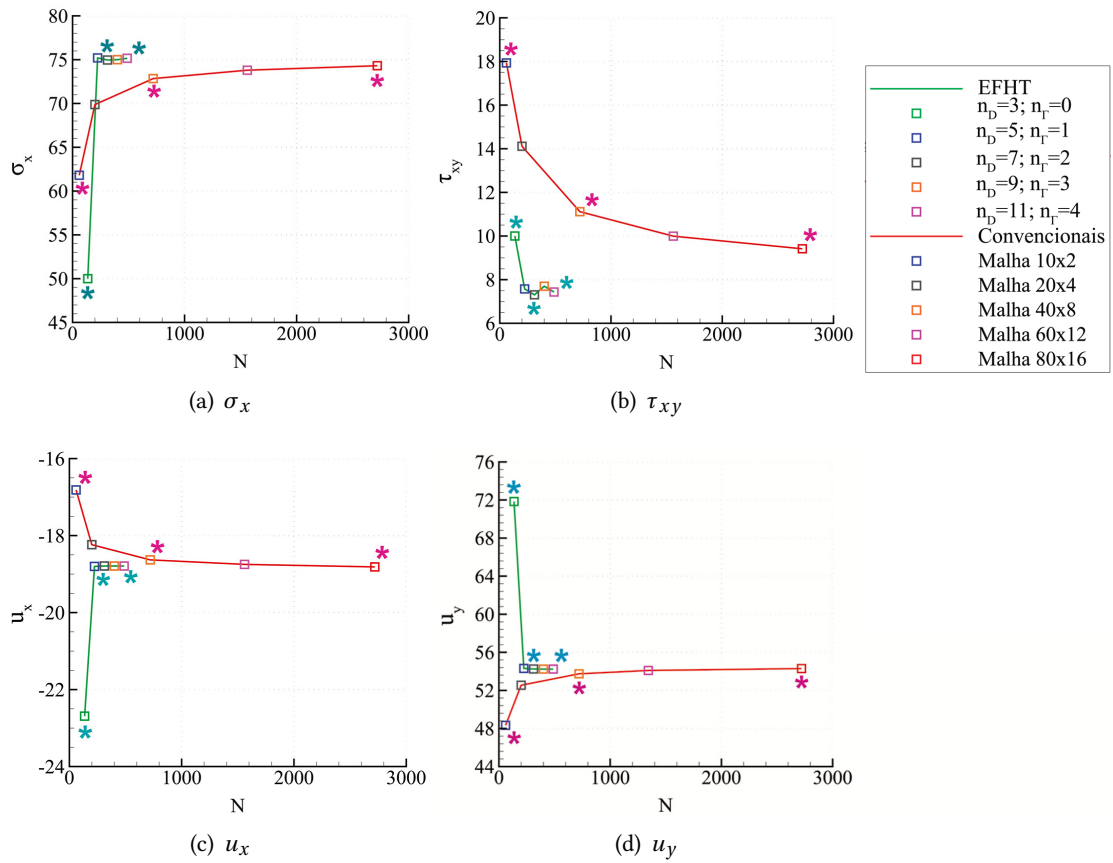
Apresenta-se na figura 5.6, uma pormenorização da zona central da viga ilustrada na figura 5.1, para representar os pontos onde são avaliados os campos de tensões e deslocamentos, de forma a realizar a comparação entre as duas formulações.

São comparadas as tensões  $\sigma_x$  e os deslocamentos  $u_x$  no ponto A e as tensões  $\tau_{xy}$  e os deslocamentos  $u_y$  no ponto B, por ser nestes pontos que os respetivos campos assumem os valores mais elevados. A escolha dos pontos ao meio vão da viga é justificada pela necessidade de mitigar os efeitos das diferenças entre os modelos na distribuição da carga  $P$  (pelo princípio de St. Venant) e face à estimativa da solução apresentada por S. Timoshenko [63].

Na figura 5.7 apresentam-se os gráficos que permitem comparar os valores das tensões ( $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ ) e deslocamentos ( $u_x$  e  $u_y$ ) obtidos pelos EFHT e pelos elementos finitos convencionais em função do número total dos graus de liberdade ( $N$ ) utilizados.



**Figura 5.6:** Viga de Timoshenko: Pontos onde se comparam os campos de tensão e deslocamento.



**Figura 5.7:** Viga de Timoshenko: Campos  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $u_x$  e  $u_y$ . Comparação de resultados entre os EFHT e os elementos finitos convencionais. Os pontos assinalados com o símbolo \* têm os seus campos representados nas figuras 5.8 e 5.10 (EFHT). Os pontos assinalados com o símbolo \* têm os seus campos representados nas figuras 5.9 e 5.11 (elementos finitos convencionais).

Da análise da figura 5.7, é possível concluir uma convergência muito mais rápida dos EFHT quando comparada com a dos elementos finitos convencionais. Este facto deve-se à informação física embutida nas bases de aproximação dos EFHT, que são específicas para cada problema que se está a resolver, ao contrário das bases de aproximação dos elementos finitos convencionais, que utilizam as mesmas bases independentemente do problema.

Por outro lado, quando comparado com os elementos finitos convencionais, a utilização das funções de aproximação das bases híbridas-Trefftz pode requerer um esforço computacional maior para o cálculo dos coeficientes do sistema governativo, pela utilização de um maior número de pontos de quadratura para efetuar a integração numérica.

Então, uma análise necessária do ponto de vista do utilizador é a comparação entre os tempos computacionais totais para a resolução do problema através do programa de EFHT e o programa SAP2000. Assim, e considerando os modelos mais refinados utilizados nos dois casos, o tempo computacional para a resolução do problema abordado foi de aproximadamente 0.9 segundos no modelo de EFHT e de cerca de 3 segundos no programa SAP2000. É notória a diferença do tempo computacional utilizado por ambas as formulações, onde a utilização do programa de EFHT obtém boas estimativas de resultados para um tempo computacional bastante mais reduzido.

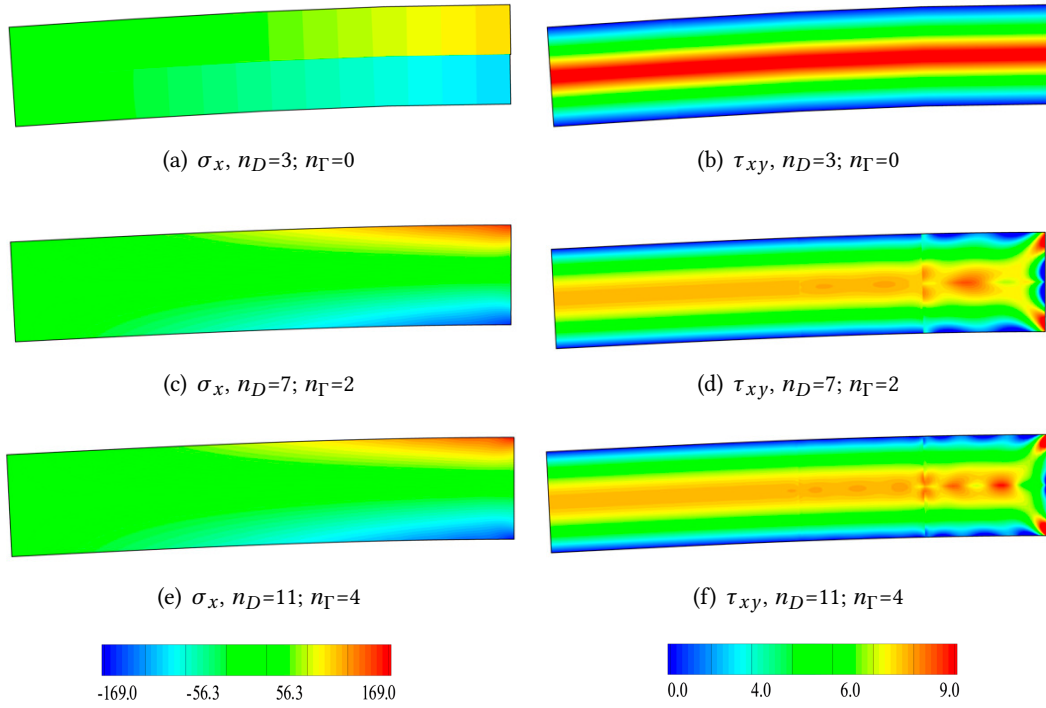
De forma a comparar a solução analítica obtida por S. Timoshenko [63] com as soluções obtidas com o programa de EFHT e o programa de elementos finitos convencionais, apresentam-se na tabela 5.2 os respetivos valores dos campos de tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  e dos campos de deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$ . Os valores estimados pelos modelos de elementos finitos correspondem aos níveis de refinamento mais elevados e são relativamente consistentes entre si, com a exceção da tensão tangencial, onde as diferenças são mais notórias. As diferenças entre as mesmas estimativas e as soluções exatas são derivadas das imprecisões na definição das condições de fronteira.

**Tabela 5.2:** Viga de Timoshenko: Comparação entre os valores exatos dos campos de tensão e deslocamento e os obtidos para os modelos mais refinados no programa de EFHT e no programa SAP2000.

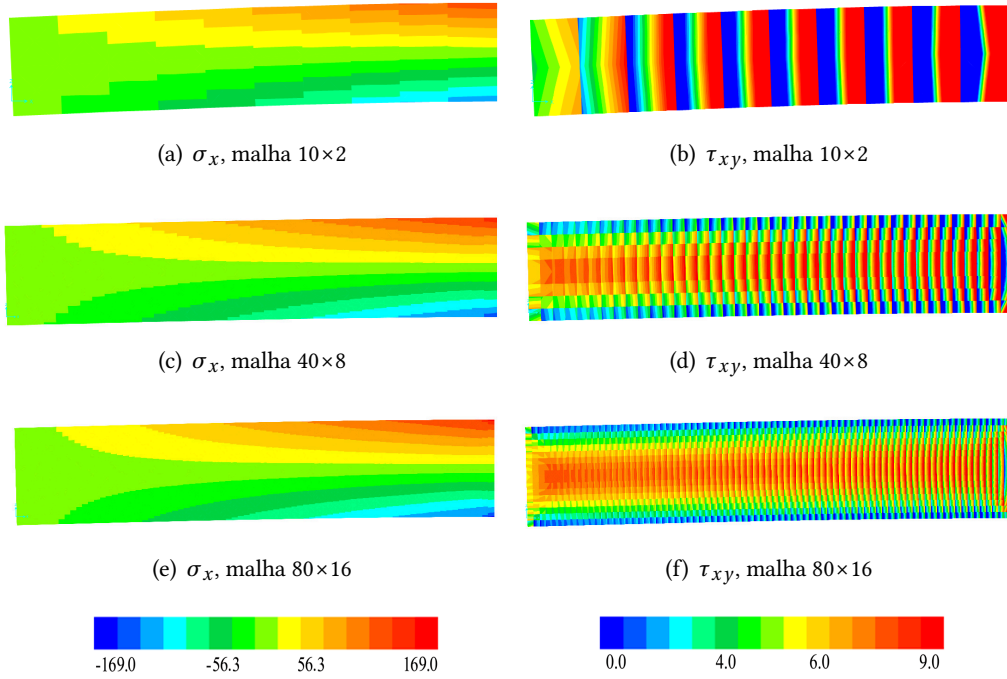
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$u_x$	$u_y$
Solução analítica	75	7.5	-18.33	52.08
EFHT	75.16	7.43	-18.79	54.49
Elementos finitos convencionais	74.31	9.41	-18.81	54.29

Para ilustrar a qualidade das soluções obtidas pelas duas formulações de elementos finitos, apresentam-se os campos de tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  para os refinamentos identificados na figura 5.7, nas figuras 5.8 e 5.9. Em ambos os casos, os mapas de cores são traçados na forma deformada da estrutura.

Analisando os campos apresentados na figura 5.9 (elementos finitos convencionais) é possível verificar, mesmo para modelos bastante refinados, descontinuidades nos campos de tensões, em comparação com os campos apresentados na figura 5.8 (EFHT), em que a continuidade das tensões é recuperada com o refinamento do modelo. A pior situação corresponde ao campo das tensões tangenciais, onde o modelo convencional tende a sobre-estimar os respetivos valores, explicando



**Figura 5.8:** Viga de Timoshenko: Campos de tensão obtidos com EFHT.



**Figura 5.9:** Viga de Timoshenko: Campos de tensão obtidos com elementos finitos convencionais.

assim a diferença entre os modelos identificada na tabela 5.2. Conforme referido na secção 3.1, os elementos híbridos-Trefftz não sendo nem localmente equilibrados, nem localmente compatíveis, apresentam estimativas dos campos de tensões e deslocamentos muito mais equilibradas em termos de qualidade. Por isso, apesar da aproximação ao campo de deslocamentos ser aproximação primária tanto no modelo convencional como no modelo de EFHT, este último apresenta uma distribuição dos campos de tensões com menos descontinuidades.

As condições de fronteira estáticas que não são impostas localmente em nenhum dos modelos são melhor recuperadas e revelam melhores estimativas da solução no modelo de EFHT do que as obtidas no modelo de elementos finitos convencionais.

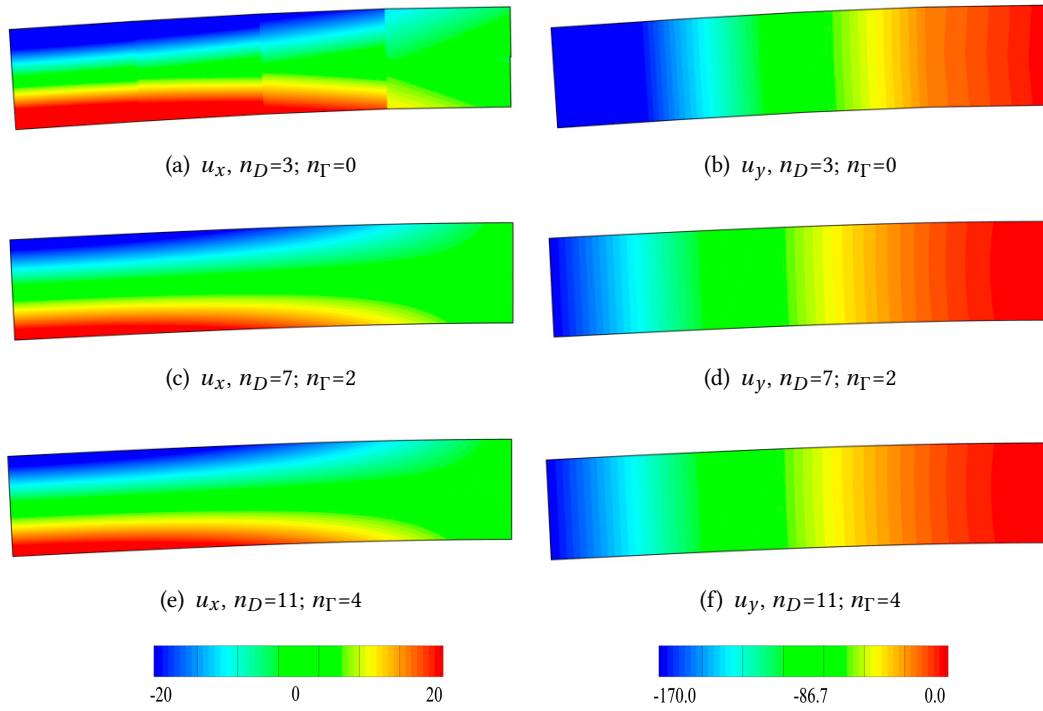
Nos cantos superior e inferior da fronteira  $X = L$ , em ambos os modelos, observam-se zonas com bruscas alterações das tensões tangenciais, que são nulas nas fronteiras horizontais e não nulas na fronteira vertical encastrada. De notar que mesmo não utilizando funções de enriquecimento específicas para tratamento de gradientes de tensões elevados na base de aproximação, o modelo de EFHT consegue lidar bem com efeitos de descontinuidade, como os existentes no exemplo apresentado, na zona do encastramento.

De modo a melhorar os resultados obtidos nestas zonas, pode-se aplicar um processo de refinamento localizado. Para o caso dos elementos convencionais, o refinamento ' $h$ ' localizado é a opção mais comum, no entanto, a sua adoção engloba um processo envolto num grande esforço de redefinição da malha. Para o caso dos EFHT, o refinamento mais indicado é o refinamento ' $p$ ' localizado, que se revela um refinamento bastante fácil de aplicar e bastante eficiente a nível computacional.

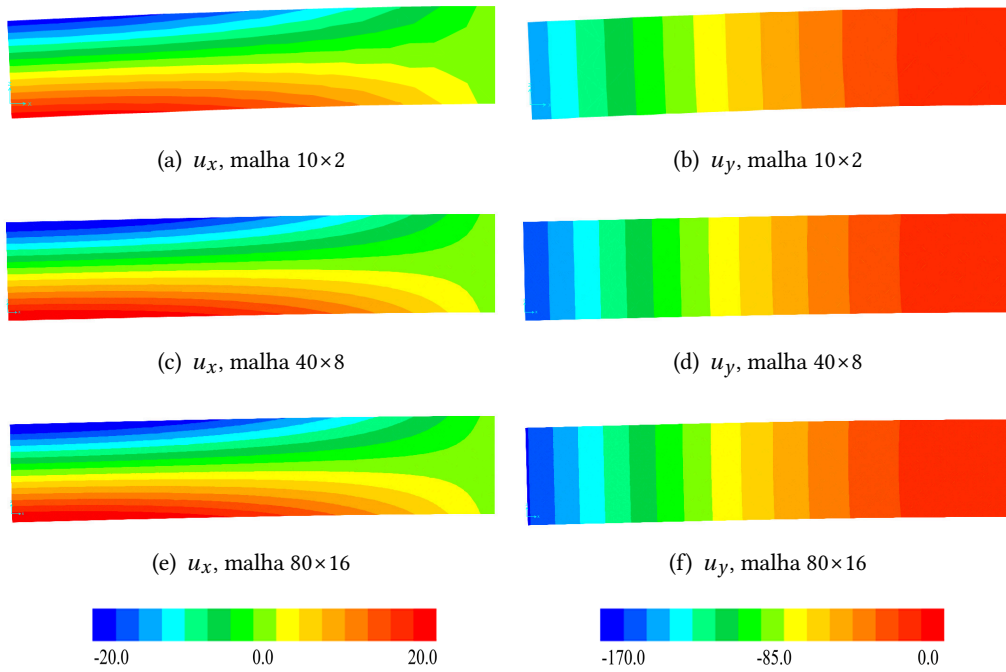
De forma análoga, para ilustrar a diferença entre as duas formulações de elementos finitos na recuperação dos campos de deslocamentos, apresentam-se os campos de deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$  para os refinamentos identificados na figura 5.7, nas figuras 5.10 (EFHT) e 5.11 (elementos finitos convencionais).

Através da análise destas figuras é possível concluir que as condições de fronteira na zona do encastramento em  $X = L$  são bem recuperadas ( $u_x = u_y = 0$ ) em ambas as formulações adotadas, mesmo para os modelos com níveis de refinamento mais grosseiros. A continuidade interelementar em deslocamentos é igualmente bem recuperada com o refinamento dos modelos. As soluções cinemáticas obtidas pelo modelo de EFHT apresentam estimativas de qualidade semelhante, mas nunca superior, às apresentadas pelo modelo de elementos finitos convencionais, pelo facto de nos EFHT as condições cinemáticas descritas serem impostas em forma fraca e nos elementos finitos convencionais serem impostas localmente.

Comparando as soluções de tensão e deslocamento, conclui-se que as estimativas dos campos de deslocamentos apresentam uma qualidade superior às estimativas dos campos de tensões nas duas formulações, tanto na recuperação das condições de fronteira como na recuperação da continuidade interelementar. Este fator era expectável, uma vez que ambas as formulações são baseadas no modelo dos deslocamentos.



**Figura 5.10:** Viga de Timoshenko: Campos de deslocamento obtidos com EFHT.



**Figura 5.11:** Viga de Timoshenko: Campos de deslocamento obtidos com elementos finitos convencionais.

### 5.3 Casos de estudo de maior complexidade

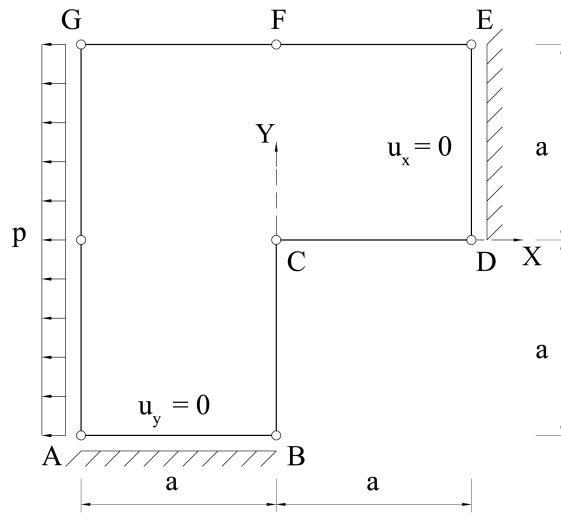
Concluída a fase de validação e ilustrada a comparação entre os EFHT e os elementos finitos convencionais, procede-se à análise de casos de estudo de complexidade mais elevada.

Os casos de estudo apresentados nesta secção são referentes a situações caracterizadas por concentrações de tensões e geometrias irregulares, que impuseram a utilização do gerador de malha não-regular incluído no programa desenvolvido.

Os resultados obtidos pelo programa de EFHT utilizando diferentes níveis de refinamento são comparados com os resultados obtidos por outros investigadores, com o objetivo de avaliar o seu desempenho e convergência.

#### 5.3.1 Placa em 'L'

O primeiro caso de estudo apresentado é a placa em forma de 'L' em estado de tensão plana ilustrada na figura 5.12. A largura e altura da placa são  $2a = 100$  e os parâmetros do material são  $E = 10^5$  e  $\nu = 0.3$ .



**Figura 5.12:** Placa em 'L'. Adaptado de [50].

Uma carga uniformemente distribuída  $p = 1$  é aplicada na fronteira  $GA$  sendo os deslocamentos da placa restringidos por encastramentos deslizantes nas fronteiras  $AB$  ( $u_y = 0$  e  $\tau_{xy} = 0$ ) e  $DE$  ( $u_x = 0$  e  $\tau_{xy} = 0$ ).

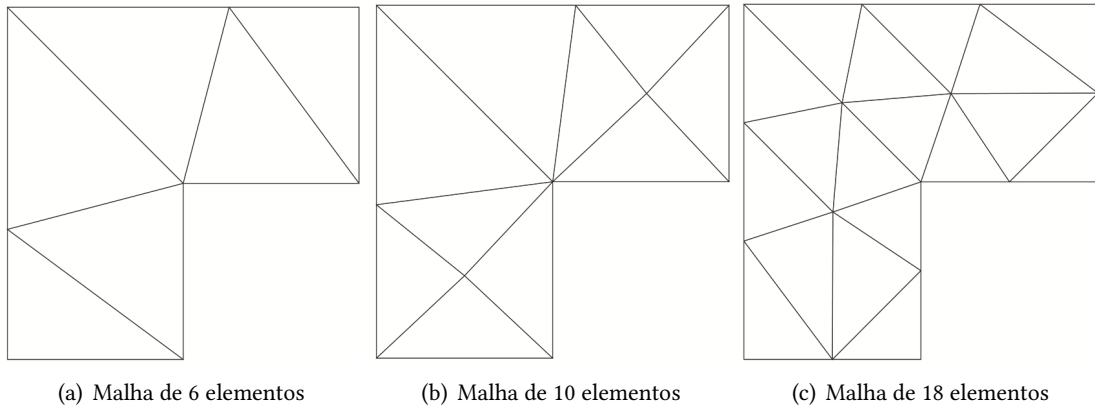
O erro da solução obtida pelo modelo de EFHT é estimado em relação à energia de deformação da placa, que é comparada com a solução de M. Shephard [69] ( $U_{MS} = 0.1556(6)$ ). A energia de deformação correspondente ao modelo de EFHT é calculada para três níveis de refinamento ' $h$ ' diferentes, de 6, 10 e 18 elementos, representados na figura 5.13. Para cada malha, quatro refinamentos ' $p$ ' são considerados, variando as ordens e os graus atribuídos às bases de aproximação no domínio e nas fronteiras, respetivamente, de  $n_D = 4$  e  $n_\Gamma = 1$  a  $n_D = 9$  e  $n_\Gamma = 4$ . O mesmo refinamento ' $p$ ' é utilizado em todos os domínios e em todas as fronteiras essenciais.

O erro da energia de deformação é definido como,

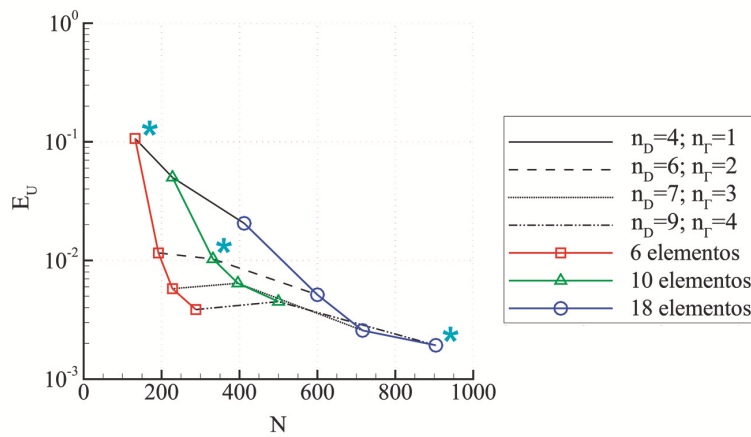
$$E_U = \left| 1 - \frac{U_{HT}}{U_{MS}} \right| \quad (5.7)$$

onde  $U_{MS}$  é a solução de referência de M. Shephard [69] e  $U_{HT}$  a solução obtida pelo programa de EFHT.

No gráfico da figura 5.14, representa-se a convergência dos resultados do modelo de EFHT através da análise do erro da energia de deformação (5.7). No eixo das abscissas são representados os números totais de graus de liberdade ( $N$ ), ao passo que no eixo (logarítmico) das ordenadas é representado o erro da energia de deformação ( $E_U$ ). A convergência sob refinamento ' $h$ ' é representada por linhas de cor preta de diferentes tipos de tracejado e a sob refinamento ' $p$ ' por linhas coloridas (vermelho, verde e azul).



**Figura 5.13:** Placa em 'L': Malhas utilizadas no programa de EFHT.



**Figura 5.14:** Placa em 'L': Erro da energia de deformação ( $E_U$ ) em função do número total de graus de liberdade ( $N$ ). Os pontos assinalados com o símbolo \* têm os seus campos representados nas figuras 5.15 e 5.16.

Através da análise do gráfico da figura 5.14 é possível concluir que a solução obtida por M. Shephard [69] é bem recuperada à medida que o modelo é refinado. Observa-se ainda uma



maior eficiência do refinamento ' $p$ ' face ao refinamento ' $h$ ', uma vez que a solução converge mais rapidamente com a sua utilização, obtendo-se uma estimativa mais próxima dos resultados. No entanto, a melhor estimativa da solução obtém-se com a utilização de um refinamento conjunto ' $p$ ' e ' $h$ ', o que permite concluir que o aumento de um tipo de refinamento concede uma maior eficácia ao outro, conduzindo ao aumento da convergência da solução.

Contudo, observa-se uma taxa de erro ligeiramente superior para os dois últimos graus de refinamento ' $p$ ' do modelo de 10 elementos, quando comparado com o modelo de 6 elementos. As oscilações do erro observadas na convergência da solução ocorrem essencialmente por duas razões. A primeira, prende-se com as irregularidades geométricas inerentes à utilização do gerador automático de malha, principalmente pelo facto dos modelos mais refinados não serem obtidos dos modelos menos refinados, mas sim gerados de raiz, conforme apresentado na figura 5.13. A segunda, deve-se ao facto dos modelos de EFHT não serem nem localmente compatíveis, nem localmente equilibrados, pelo que a convergência da energia não é monotónica.

Da análise dos valores obtidos, por deter o menor erro face à solução de M. Shephard [69] (aproximadamente 0.2%), a melhor estimativa da solução é a do modelo de 18 elementos para uma ordem das funções de aproximação  $n_D = 9$  nos domínios dos elementos e um grau dos polinómios de Chebyshev  $n_T = 4$  nas fronteiras.

Uma vez que os erros da energia de deformação relativa à solução de M. Shephard [69] são relativamente reduzidos, conclui-se que os EFHT são capazes de recuperar uma boa estimativa para a solução do problema.

Apresentam-se nas figuras 5.15 e 5.16 os campos de tensões e de deslocamentos para os níveis de refinamento assinalados na figura 5.14, representados na forma deformada da placa. O objetivo passa por proporcionar uma avaliação visual dos campos, principalmente no que respeita à continuidade interelementar e à recuperação das condições de fronteira impostas, de forma a avaliar a convergência dos modelos.

Relativamente às condições estáticas impostas explicitamente nas fronteiras o modelo deve recuperar as tensões normais impostas nas fronteiras de Neumann e as tensões tangenciais nulas em todas as fronteiras exteriores. Através da análise das figuras 5.15 a), d) e g) é possível verificar que a carga distribuída na fronteira  $GA$  em  $X = -a$  é efetivamente bem recuperada, melhorando com o refinamento, sendo a sua melhor estimativa obtida para o modelo mais refinado (5.15 g)). Como se observa pela análise aos campos da solução na figura 5.15, as restantes forças aplicadas também são bem recuperadas, incluindo as tensões tangenciais (figuras 5.15 f) e i)).

A continuidade dos campos de tensões entre elementos, não sendo imposta explicitamente na formulação, é sinal de convergência do modelo. Como é possível observar na figura 5.15, o campo de tensões apresenta descontinuidades para o modelo menos refinado, mas através da aplicação de um processo conjunto de refinamentos ' $p$ ' e ' $h$ ', a continuidade dos campos de tensões entre elementos adjacentes é recuperada.

Denota-se ainda na figura 5.15, o desenvolvimento de bolbos de tensões derivados do ponto de singularidade existente no vértice  $C$  da placa. Assim, mesmo não utilizando bases de aproximação enriquecidas com funções específicas para tratar gradientes de tensão localmente elevados, o modelo de EFHT consegue recuperar bem os elevados gradientes do campo de tensões na vizinhança

do ponto C.

Através da análise da figura 5.16, é possível concluir que as condições cinemáticas impostas explicitamente nas fronteiras exteriores de Dirichlet são bem recuperadas para todos os refinamentos (deslocamento nulo nas fronteiras  $AB$ ,  $u_y = 0$ , e  $DE$ ,  $u_x = 0$ ).

No que diz respeito às condições de continuidade interelementares, estas são respeitadas para todos os refinamentos, com a exceção do mais grosseiro.

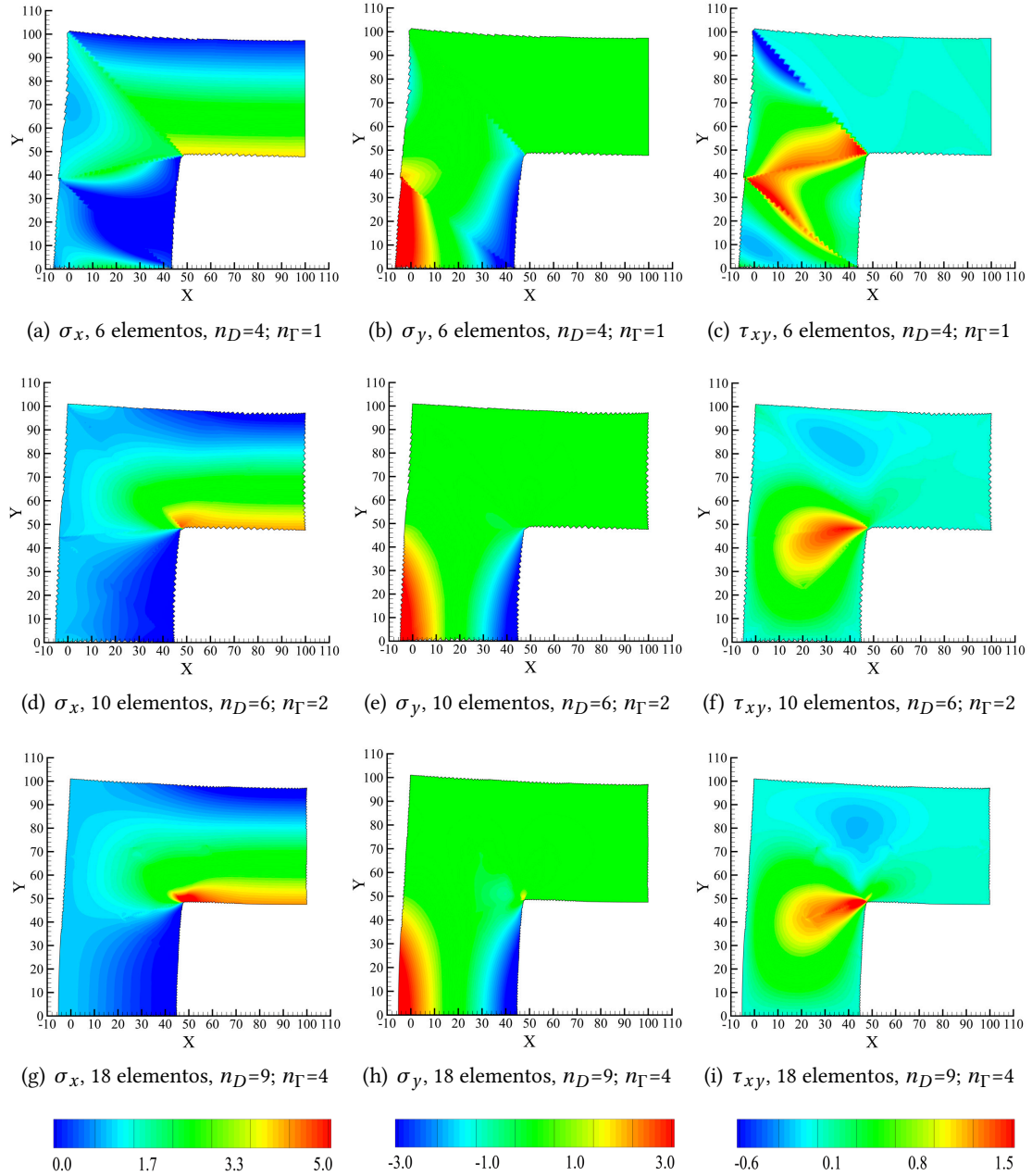


Figura 5.15: Placa em 'L': Campos de tensão.

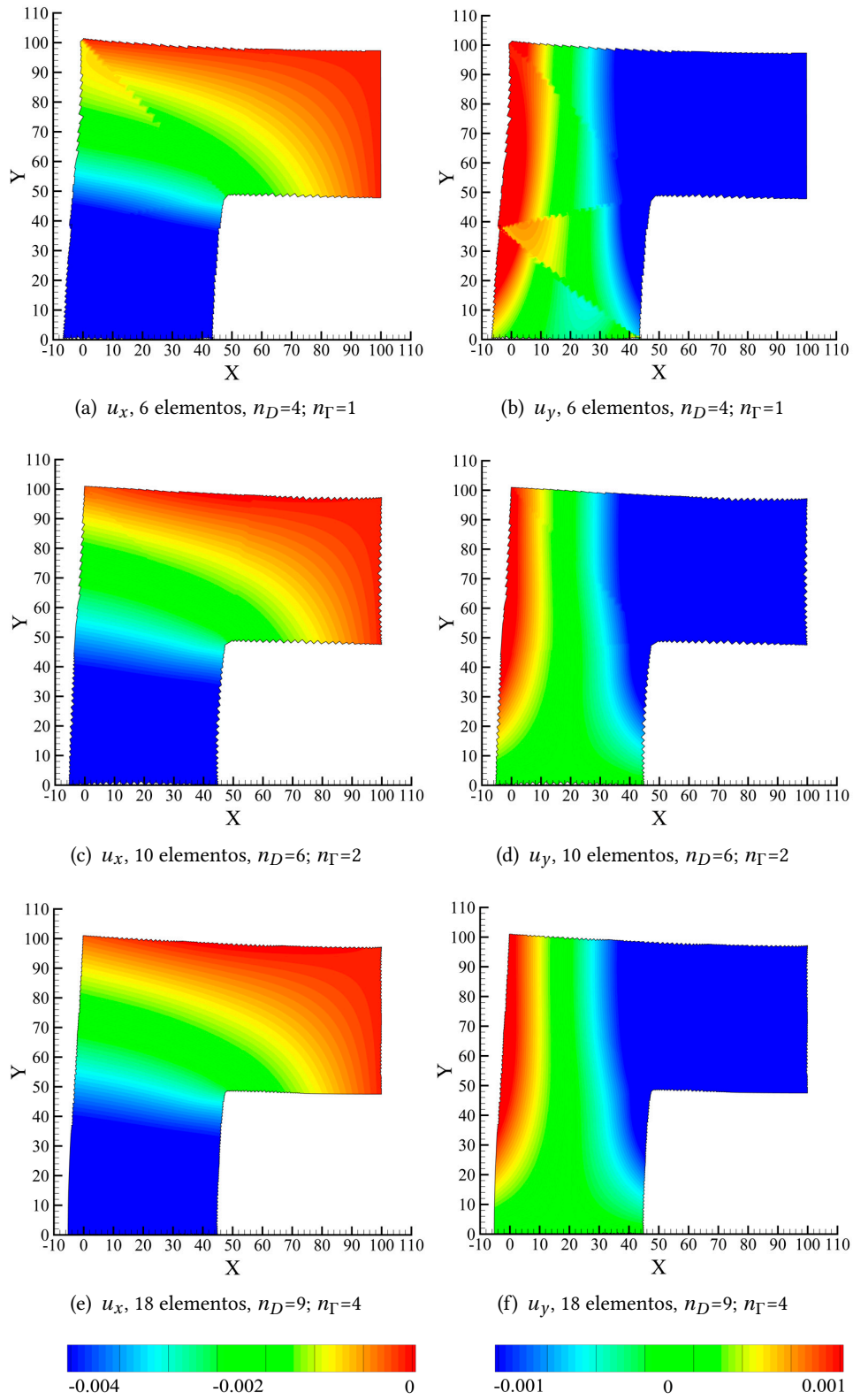


Figura 5.16: Placa em 'L': Campos de deslocamento.

Apesar de uma aparente diferença significativa ao nível dos erros da energia de deformação entre os modelos de 10 e 18 elementos, observável na figura 5.14, pela análise visual dos campos das figuras 5.15 e 5.16, esta diferença faz-se notar sobretudo na representação do campo de tensões junto à zona de singularidade e na qualidade das tensões na fronteira  $X = -a$ . Na solução dos deslocamentos não ocorrem alterações visíveis entre estes dois modelos.

Comparando agora as soluções dos campos das tensões e dos deslocamentos, pretende-se avaliar a diferença da qualidade das mesmas. Relativamente à capacidade de recuperar as condições de fronteira impostas explicitamente, a solução das tensões para refinamentos mais baixos apresenta uma qualidade bastante inferior à apresentada pela solução dos deslocamentos. Pelo contrário, a solução dos deslocamentos é capaz de recuperar as condições cinemáticas impostas para refinamentos substancialmente inferiores aos que correspondem à convergência dos campos de tensões. Esta situação era expectável, uma vez que as condições estáticas e cinemáticas são impostas de forma diferente no modelo. No entanto, mesmo sendo notória a mais rápida recuperação das condições de fronteira cinemáticas que das estáticas, ambas as soluções convergem para uma qualidade semelhante com o refinamento do modelo. No que toca às condições de fronteira interelementares, as soluções de deslocamentos recuperam a continuidade interelementar para níveis de refinamento mais baixos e geralmente com melhor qualidade do que as soluções de tensões. Esta situação é justificada pelo facto das condições de equilíbrio interelementar não serem de todo impostas na formulação ao contrário das condições de compatibilidade interelementar (impostas em forma fraca e portanto recuperadas mais rapidamente que as condições de equilíbrio), sendo assim recuperadas apenas no caso de plena convergência do modelo. Consequentemente, a qualidade do equilíbrio interelementar aumenta à medida que se aumenta o nível de refinamento do modelo, constituindo assim, uma boa medida de convergência a adotar em processos automáticos  $p'$ -adaptativos.

### 5.3.2 Painel de Cook

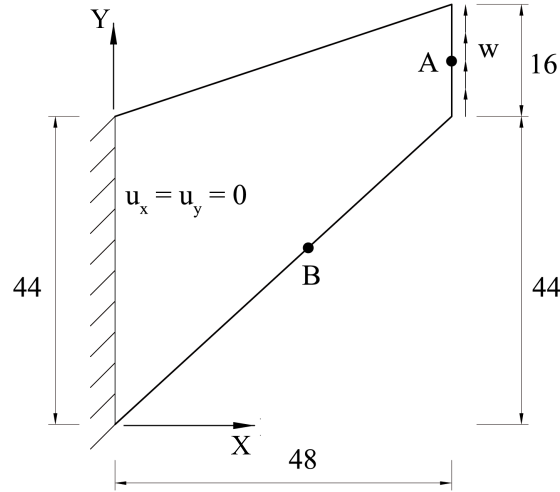
O segundo caso de estudo abordado neste trabalho é o painel de Cook. Trata-se de uma placa em estado de tensão plana, com a fronteira  $X = 0$  encastrada e a fronteira  $X = 48$  submetida a uma carga tangencial uniforme, como representado na figura 5.17.

O problema ilustrado na figura 5.17 foi modelado por C. de Souza [70] para um carregamento  $w = 0.0625$  e parâmetros do material  $E = 1$  e  $\nu = \frac{1}{3}$ , usando um programa de cálculo automático baseado na formulação de elementos conformes de deslocamento (ANSYS). O modelo foi composto por uma malha de 969 elementos triangulares de 6 nós com 4144 graus de liberdade. As soluções obtidas por C. de Souza referentes aos campos das tensões e dos deslocamentos nos pontos  $B$  e  $A$ , respetivamente, são utilizadas para comparação com as obtidas pela formulação de EFHT.

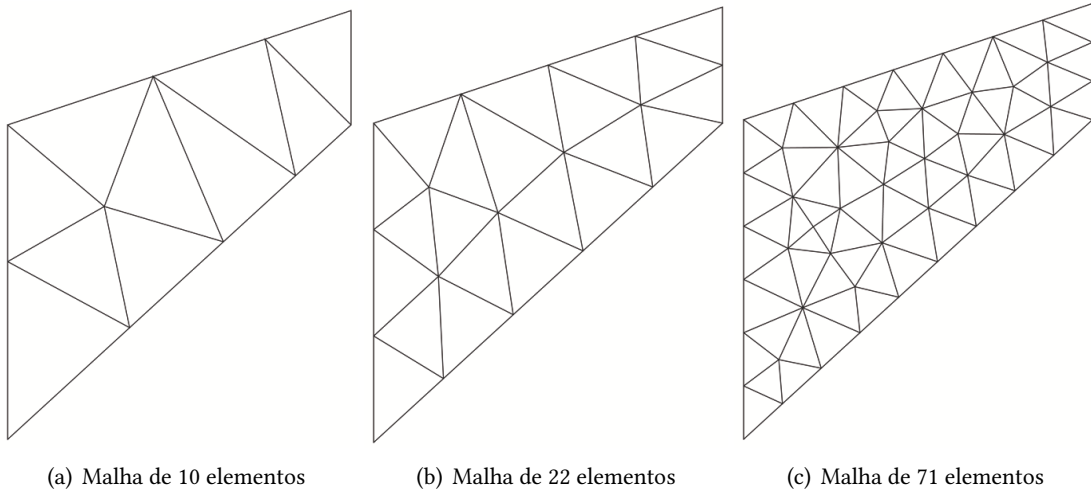
Os valores tomados como referência são a tensão principal máxima no ponto  $B$ ,  $\sigma_{max} = 0.2368$ , e o deslocamento vertical no ponto  $A$ ,  $u_y = 23.95$  [70].

Os modelos de EFHT usados para a modelação do painel de Cook utilizam três níveis de refinamento  $h'$ , de 10, 22 e 71 elementos, como apresentado na figura 5.18.

Para cada um dos modelos apresentados na figura 5.18, avalia-se a influência do refinamento ' $p$ ' na convergência dos resultados através da aplicação de vários níveis do mesmo, variando as ordens das funções no domínio e os graus dos polinômios nas fronteiras de  $n_D = 4$  e  $n_\Gamma = 1$  a  $n_D = 9$  e  $n_\Gamma = 4$ . O mesmo refinamento ' $p$ ' é utilizado em todos os domínios e em todas as fronteiras essenciais.



**Figura 5.17:** Painel de Cook. Adaptado de [70].



**Figura 5.18:** Painel de Cook: Malhas utilizadas no programa de EFHT.

Para a obtenção do valor da tensão principal máxima utiliza-se a expressão,

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left( \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.8)$$

onde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  são os valores das tensões fornecidas diretamente pelo programa.

O erro é estimado em relação às soluções apresentadas por C. de Souza [70] para o campo de tensões de acordo com a expressão,

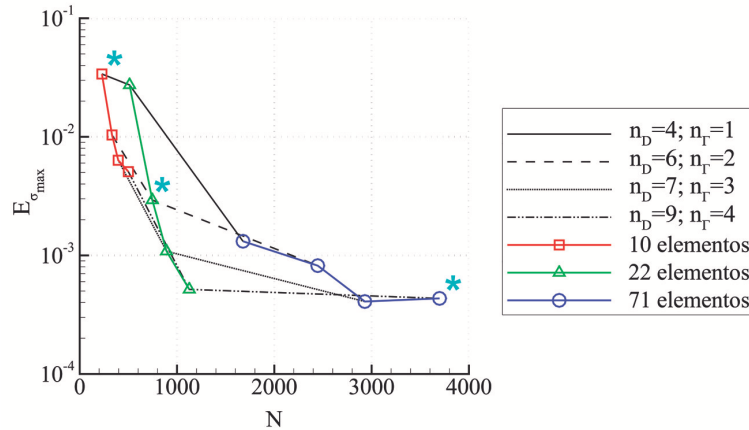
$$E_{\sigma_{max}} = \left| 1 - \frac{\sigma_{max}^{HT}}{\sigma_{max}^{CS}} \right| \quad (5.9)$$

e para o campo de deslocamentos,

$$E_{u_y} = \left| 1 - \frac{u_y^{HT}}{u_y^{CS}} \right| \quad (5.10)$$

em que,  $\sigma_{max}^{HT}$  e  $u_y^{HT}$  são os valores obtidos pelo programa de EFHT, e  $\sigma_{max}^{CS}$  e  $u_y^{CS}$  são os valores de referência obtidos por C. de Souza [70].

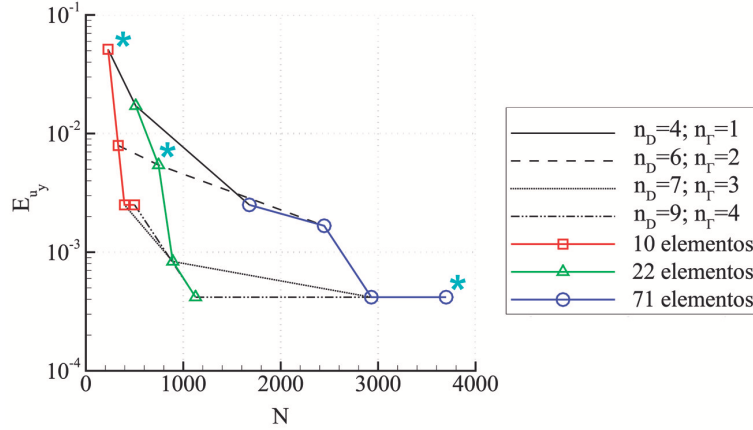
Nos gráficos das figuras 5.19 e 5.20 representa-se a convergência do modelo através da análise do erro da tensão máxima e deslocamento vertical obtidos nos pontos *B* e *A*, respectivamente. Nos gráficos, no eixo das abscissas são representados os graus de liberdade (*N*) e nas ordenadas os erros da tensão máxima ( $E_{\sigma_{max}}$ ) e do deslocamento na direção *y* ( $E_{u_y}$ ). As ordenadas utilizam uma escala logarítmica. O refinamento '*h*' é representado por linhas de cor preta de diferentes tipos de tracejado e o refinamento '*p*' por linhas coloridas (vermelho, verde e azul).



**Figura 5.19:** Painei de Cook: Erro da tensão máxima no ponto *B* ( $E_{\sigma_{max}}$ ) em função do número total de graus de liberdade (*N*). Os pontos assinalados com o símbolo \* têm os seus campos representados na figura 5.21.

Através da análise do gráfico da figura 5.19 é possível concluir que a solução obtida por C. de Souza [70] é bem recuperada à medida que o modelo é refinado. Tal como na placa em 'L', verifica-se uma muito maior eficiência do refinamento '*p*' face ao refinamento '*h*', uma vez que a solução converge mais rapidamente com a sua utilização, obtendo-se uma melhor aproximação dos resultados. No entanto, a melhor estimativa da solução obtém-se com a utilização de um refinamento conjunto '*p*' e '*h*'. Esta situação evidencia-se através da análise do modelo de 71 elementos, que, mesmo para ordens baixas das bases de aproximação, apresenta um erro relativo significativamente inferior aos dos restantes dois modelos.

O modelo de 22 elementos, mesmo apresentando estimativas de erro mais elevadas para quase todos os refinamentos '*p*' testados face ao modelo de 71 elementos, converge para o mesmo



**Figura 5.20:** Paineis de Cook: Erro do deslocamento vertical no ponto  $A$  ( $E_{u_y}$ ) em função do número total de graus de liberdade ( $N$ ). Os pontos assinalados com o símbolo  $*$  têm os seus campos representados na figura 5.22.

erro no seu refinamento máximo ( $n_D = 9$  e  $n_T = 4$ ). Para o modelo de 71 elementos este erro é recuperado para um refinamento ' $p$ ' inferior ( $n_D = 7$  e  $n_T = 3$ ), que corresponde, no entanto, a um número total de graus de liberdade três vezes maior. A estimativa do erro atinge, para estes níveis de refinamento (bem como para o modelo de 71 elementos com  $n_D = 9$  e  $n_T = 4$ ), um patamar constante, de aproximadamente 0.04 %, que é consequência do limite de precisão do valor de referência que se está a considerar.

Assim, o modelo de 22 elementos providencia uma boa estimativa da solução poupando esforço e memória computacional (sistema de menor dimensão), concluindo-se que apresenta a melhor estimativa da tensão máxima face aos graus de liberdade utilizados.

A convergência da estimativa do deslocamento  $u_y$  no ponto  $A$  para a solução obtida na referência [70] apresenta um padrão praticamente idêntico ao da convergência da tensão  $\sigma_{max}$  no ponto  $B$ , pelo que as conclusões são semelhantes.

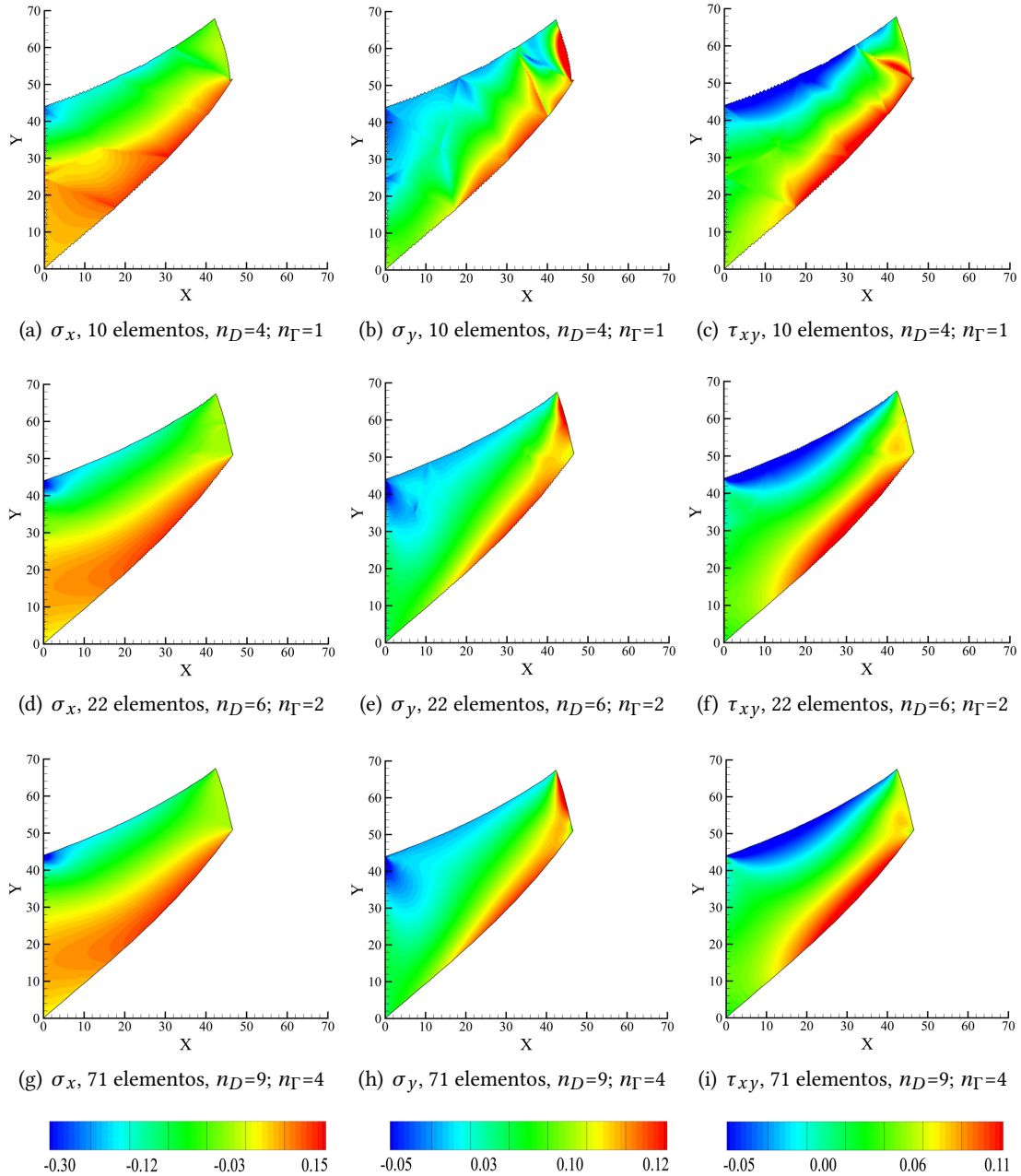
Apresentam-se nas figuras 5.21 e 5.22 os campos de tensões e de deslocamentos correspondentes aos refinamentos assinalados nas figuras 5.19 e 5.20, representados na forma deformada do painel. O objetivo é novamente proporcionar uma avaliação visual dos campos, principalmente no que toca à continuidade interelementar e à recuperação das condições de fronteira impostas, de forma a avaliar a convergência dos modelos.

Através da análise dos campos de tensões representados na figura 5.21, observa-se que as soluções dos campos de tensões conseguem recuperar bem as condições de fronteira estáticas em  $X = 48$  do painel (carregamento aplicado,  $\tau_{xy} = w$  e  $\sigma_x = 0$ ). A carga aplicada na extremidade livre da placa induz na parte inferior do painel uma zona de flexão que fica bem expressa através da análise dos campos de tensões normais.

Relativamente à continuidade interelementar das tensões (não imposta de todo na formulação), verifica-se uma melhoria significativa da solução do modelo de 10 elementos para o modelo de 22 elementos, o que era expectável, uma vez que o modelo de 10 elementos corresponde ainda a uma malha relativamente grosseira, e com uma ligeira diferença nos modelos de 22 para 71

elementos, apresentando para o modelo mais refinado uma solução contínua. Assim, conclui-se que a continuidade interelementar dos campos das tensões é recuperada com o refinamento do modelo.

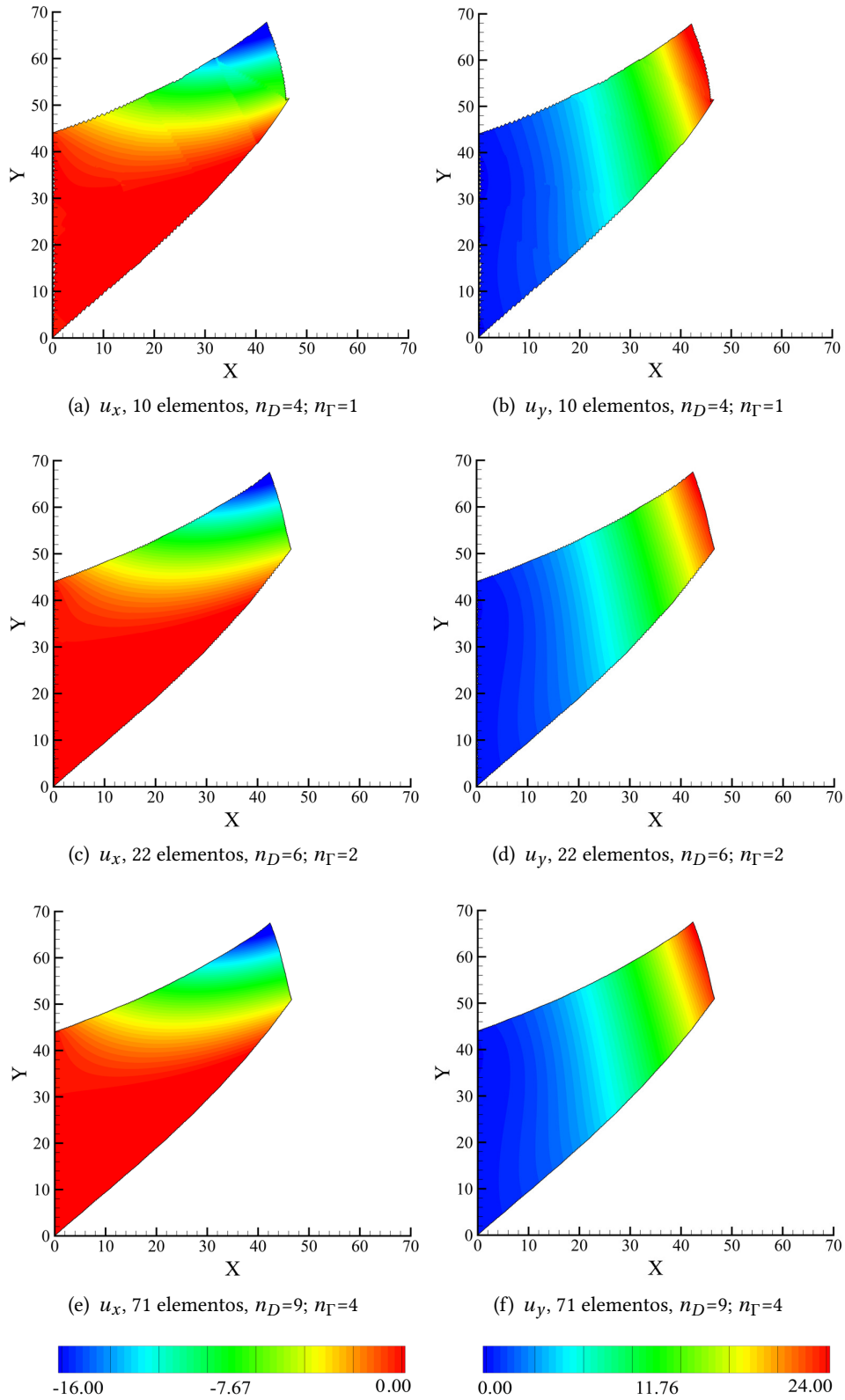
Através da análise da figura 5.22, é possível concluir que as condições de fronteira cinemáticas são bem recuperadas na fronteira exterior de Dirichlet ( $X = 0$ ), onde os deslocamentos são nulos ( $u_x = 0$  e  $u_y = 0$ ).



**Figura 5.21:** Painel de Cook: Campos de tensão.

Já a continuidade interelementar, como observado nas figuras 5.22 c), d), e) e f) é recuperada rapidamente para todos os modelos, ainda que com ligeiras discontinuidades apresentadas pelo





**Figura 5.22:** Painel de Cook: Campos de deslocamento.

modelo menos refinado.

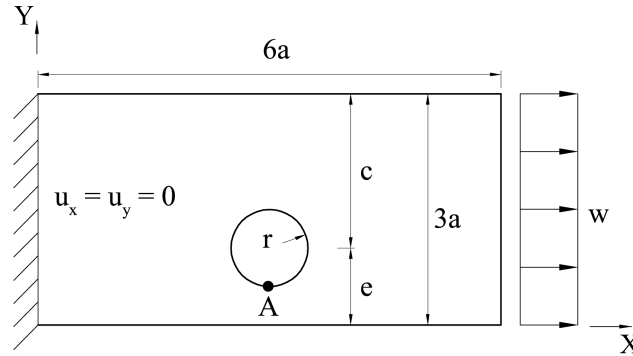
Tal como verificado para o primeiro caso de estudo, apesar de uma aparente diferença significativa ao nível dos campos das tensões e dos deslocamentos entre os modelos de 22 e 71 elementos apresentados nas figuras 5.19 e 5.20, pela análise visual dos campos nas figuras 5.21 e 5.22, verifica-se que essa diferença é bastante reduzida.

Comparando agora as soluções dos campos das tensões e dos deslocamentos, pretende-se avaliar a diferença da qualidade das mesmas, sendo as conclusões bastante semelhantes às apresentadas no exemplo da placa em 'L'. O facto do modelo estar constrangido a satisfazer a continuidade dos deslocamentos, mas não a continuidade das tensões, tem um impacto visível na solução final.

Uma vez que os erros dos campos de tensões e deslocamentos obtidos, comparando as soluções estimadas pelo modelo de EFHT com as soluções apresentadas por C. de Souza [70], são relativamente reduzidos, conclui-se que a formulação aqui desenvolvida é capaz de obter uma boa estimativa da solução para este problema.

### 5.3.3 Placa com orifício circular

O terceiro caso de estudo é uma placa de geometria retangular, em estado de tensão plana, com um orifício circular, encastrada na extremidade  $X = 0$  e tracionada por uma carga horizontal constante na extremidade  $X = 6a$ .



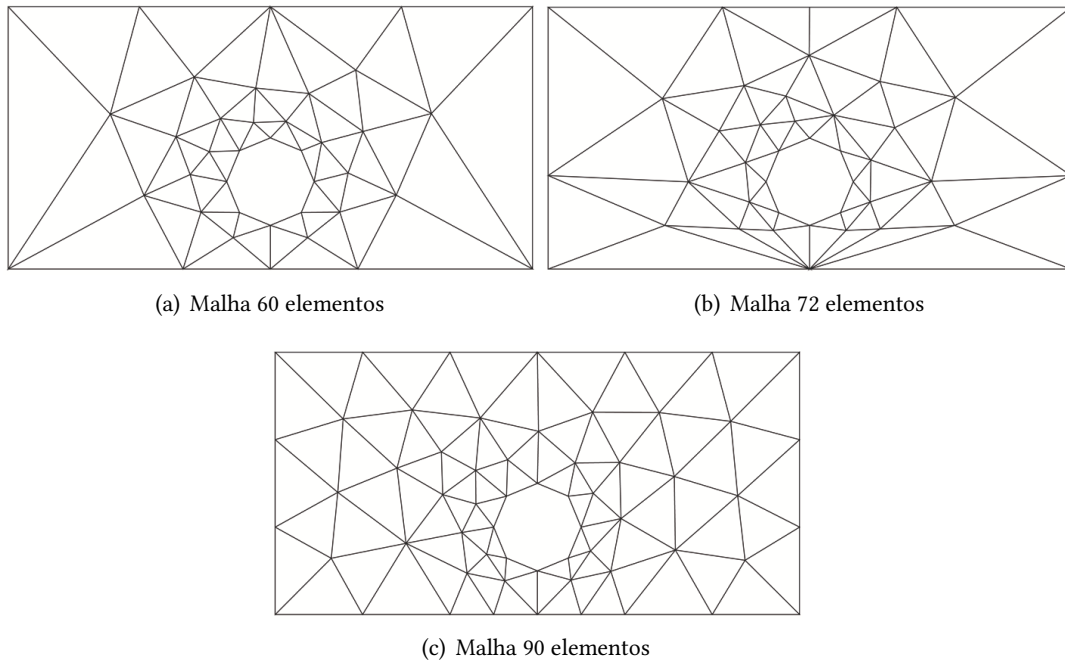
**Figura 5.23:** Placa com orifício circular. Adaptado de [70].

Para o caso ilustrado na figura 5.23, os parâmetros geométricos utilizados foram  $e = a = 20$ ,  $\frac{c}{e} = 2$ ,  $r = 10$ , o carregamento  $w = 10$  e os parâmetros do material  $E = 1000$  e  $\nu = 0.3$ . Os resultados foram comparados com as soluções obtidas por C. de Souza [70] referentes à energia de deformação e ao campo de tensões no ponto A representado.

No artigo de C. de Souza [70], o problema é resolvido com recurso a um programa de elementos finitos convencionais (ANSYS) e a um programa que utiliza elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão. No ANSYS, os autores utilizaram um modelo com uma malha de elementos triangulares de seis nós com 1278 elementos e 5428 graus de liberdade. No programa de elementos finitos híbridos-Trefftz utilizado pelos mesmos autores, o modelo apresentado utiliza 2462 graus de liberdade.

Ainda referente ao estudo realizado por C. de Souza [70], nos resultados obtidos utilizando elementos finitos convencionais, a estimativa do valor da energia de deformação é de  $U = 417.16$  e da tensão máxima no ponto  $A$  é de  $\sigma_{max} = 41.4$ . Nos resultados obtidos pelo programa de elementos finitos híbridos-Trefftz utilizado pelos mesmos autores, a estimativa do valor da energia de deformação é de  $U = 413.23$  e da tensão máxima é de  $\sigma_{max} = 41.0$ .

No programa de EFHT desenvolvido no presente trabalho, a análise da placa com orifício circular é feita aplicando um nível de refinamento ' $h$ ' de 60, 72 e 90 elementos, como apresentado na figura 5.24.



**Figura 5.24:** Placa com orifício circular: Malhas utilizadas no programa de EFHT.

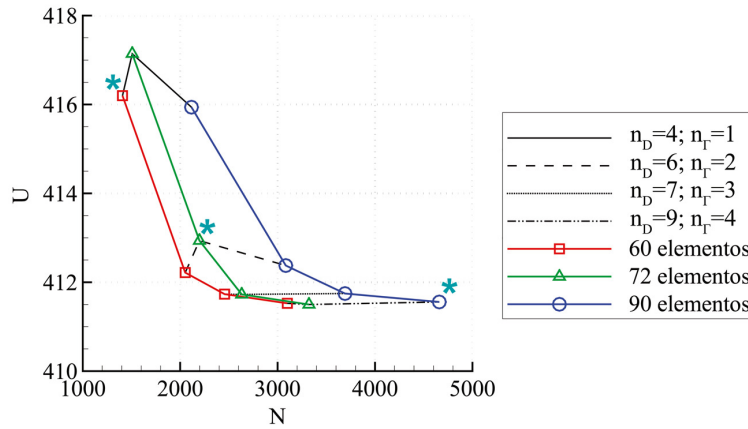
À semelhança dos anteriores casos de estudo, para cada um dos modelos apresentados na figura 5.24, avalia-se a influência do refinamento ' $p$ ' através da aplicação de vários níveis do mesmo, variando as ordens das funções no domínio e o grau dos polinômios nas fronteiras de  $n_D = 4$  e  $n_\Gamma = 1$  a  $n_D = 9$  e  $n_\Gamma = 4$ . O mesmo refinamento ' $p$ ' é utilizado em todos os domínios e em todas as fronteiras essenciais.

Devido às limitações do gerador automático de malha utilizado no presente trabalho, mas não no trabalho desenvolvido por C. de Souza [70], o orifício circular apresentado na figura 5.23 é modelado através de um octógono. Esta situação origina erros causados pela imprecisão da geometria e concentrações espúrias de tensões que poluem os campos de tensões à volta do orifício.

No gráfico da figura 5.25 representa-se a convergência da energia de deformação. No eixo das abscissas são representados os graus de liberdade ( $N$ ) e nas ordenadas os valores da energia de deformação ( $U$ ). O refinamento ' $h$ ' é representado por linhas de cor preta de diferentes tipos de tracejado e o refinamento ' $p$ ' por linhas coloridas (vermelho, verde e azul).

Através da análise do gráfico da figura 5.25, é possível concluir novamente uma maior eficiência do refinamento ' $p$ ' face ao refinamento ' $h$ ', uma vez que a solução converge mais rapidamente com a sua utilização, tal como observado para os dois casos de estudo anteriores.

A solução converge para um valor da energia de deformação  $U = 411.50$  em todos os modelos testados pelo programa de EFHT, tal como observado no gráfico da figura 5.25. Esta estimativa é obtida com 3100 graus de liberdade para o modelo de 60 elementos, 3322 graus de liberdade para o modelo de 72 elementos e 4660 graus de liberdade para o modelo de 90 elementos.



**Figura 5.25:** Placa com orifício circular: Energia de deformação ( $U$ ) em função do número total de graus de liberdade ( $N$ ). Os pontos assinalados com o símbolo \* têm os seus campos representados nas figuras 5.26 e 5.27.

Desta forma, é possível concluir que o programa de EFHT desenvolvido no presente trabalho, apesar dos erros inerentes à modelação do orifício circular através de um polígono, permite a obtenção de uma estimativa da solução (da energia de deformação) que apresenta um elevado grau de convergência para menos graus de liberdade quando comparado com o programa ANSYS.

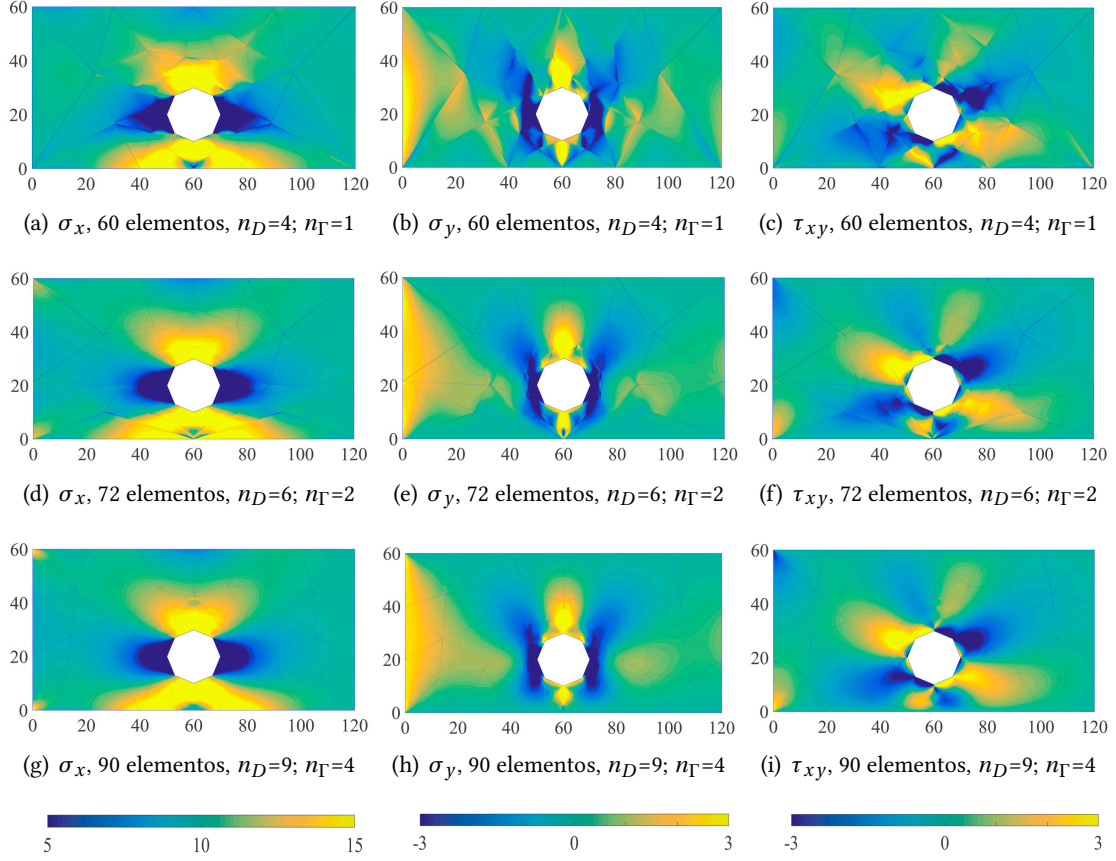
Por sua vez, a solução obtida pelo programa de EFHT apresenta uma estimativa da energia de deformação bastante próxima da apresentada por C. de Souza [70] utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão. Este comportamento verificou-se mesmo para o modelo de 60 elementos com o maior nível de refinamento ' $p$ ' ( $n_D = 9$  e  $n_T = 4$ ).

É ainda possível concluir que a solução que corresponde à convergência da energia de deformação do modelo de EFHT desenvolvido no presente trabalho, mesmo diferindo em 1.356% face à solução obtida pelo programa ANSYS, é bastante consistente com os resultados obtidos por C. de Souza [70] utilizando elementos da mesma natureza no modelo de tensão (apenas 0.418%).

Apresentam-se na figura 5.26 os campos das tensões correspondentes aos pontos assinalados no gráfico da figura 5.25. Tal como nos anteriores casos de estudo apresentados, o objetivo passa por proporcionar uma avaliação visual dos campos, principalmente no que respeita à continuidade interelementar dos campos de tensões e à recuperação das condições de fronteira impostas, de forma a avaliar a convergência dos modelos.

Para o caso de estudo em particular, era expectável que o campo das tensões da placa traçionada fosse afetado pela existência do orifício circular modelado através de um octógono. A

presença dos vórtices do mesmo, ausentes na realidade, tem um impacto considerável na distribuição do campo das tensões na vizinhança do orifício, causando tensões localizadas e com gradientes elevados. Este efeito verifica-se, de facto, nos campos apresentados na figura 5.26, sendo a sua quantificação um objetivo da análise subsequente.



**Figura 5.26:** Placa com orifício circular: Campos de tensão.

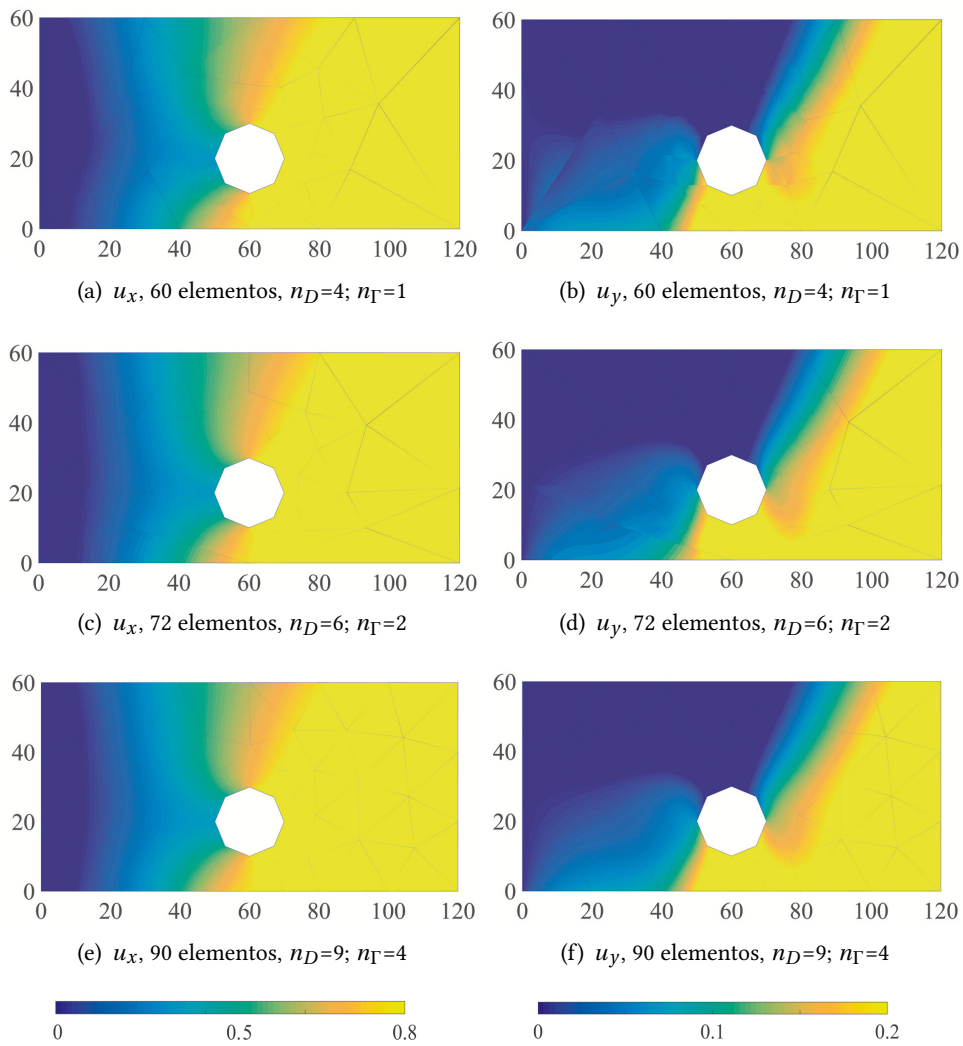
Para o campo de tensões, observa-se que as condições de fronteira estáticas impostas explicitamente nas fronteiras de Neumann são recuperadas, nomeadamente, as tensões normais nas fronteiras exteriores (carga aplicada  $w$  na fronteira  $X = 6a$  e tensão  $\sigma_y = 0$  nas fronteiras  $Y = 0$  e  $Y = 3a$ ) e as tensões tangenciais nulas nas mesmas fronteiras. Relativamente às condições de fronteira impostas no orifício, mesmo este sendo afetado por tensões espúrias nos vórtices do polígono que o define, o modelo tende a recuperar as tensões normais e tangenciais nulas nos respetivos quadrantes.

Em relação à continuidade no campo das tensões, verifica-se que esta é mal recuperada no primeiro modelo (modelo de 60 elementos), sendo ainda visíveis no segundo modelo (modelo de 72 elementos) ligeiras descontinuidades deste campo. Assim, a continuidade interelementar é melhorada com o refinamento do modelo, apresentando a sua melhor estimativa para o modelo mais refinado (modelo de 90 elementos).

No que diz respeito às concentrações de tensões espúrias à volta do orifício (figura 5.26), os seus valores não têm qualquer relevância prática, uma vez que não existiriam caso o orifício fosse

perfeitamente circular. O seu efeito é, portanto, consequência de uma limitação da implementação (que utiliza um gerador de malha nativo do ambiente de programação Matlab) e não da formulação do problema. No entanto, é possível observar que este efeito é bastante confinado à vizinhança mais próxima dos quadrantes do polígono. Para ilustrar esta situação, a tensão  $\sigma_{max}$  dada como valor de referência no ponto A (figura 5.23) do orifício circular em [70], é recuperada pelo modelo mais refinado a uma ínfima distância ( $3 \times 10^{-2}a$ ) do quadrante inferior do polígono.

Apresentam-se na figura 5.27 os campos dos deslocamentos correspondentes aos refinamentos assinalados no gráfico da figura 5.25.



**Figura 5.27:** Placa com orifício circular: Campos de deslocamento.

Através da análise da figura 5.27, é possível concluir que as condições de fronteira cinemáticas são bem recuperadas, tendo um valor nulo na fronteira de  $X = 0$ , mesmo para um nível de refinamento ' $h$ ' grosseiro.

A continuidade interelementar dos campos dos deslocamentos é igualmente bem recuperada mesmo para modelos menos refinados.

Fazendo novamente uma comparação entre os campos de tensões e de deslocamentos, verifica-se um comportamento semelhante aos casos de estudo anteriores.

Assim, conclui-se que, mesmo com a geometria do orifício incorretamente modelada, o programa de EFHT desenvolvido é capaz de obter boas estimativas da solução para o problema.





## Capítulo 6

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 6.1 Conclusões

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional, em ambiente Matlab, que utiliza a formulação híbrida-Trefftz no seu modelo de deslocamentos para a resolução de problemas estáticos de elasticidade plana.

A razão pela qual a formulação híbrida-Trefftz foi escolhida neste trabalho, em detrimento da formulação de elementos finitos conformes de deslocamento, prende-se com a relativa falta de precisão que estes últimos apresentam na recuperação do campo das tensões. Sendo este campo utilizado para o dimensionamento estrutural em diferentes áreas da Engenharia, é de grande importância que a solução obtida assegure uma estimativa de qualidade.

Os elementos conformes de deslocamento (convencionais), baseados no método de Ritz, são localmente compatíveis, ou seja, constroem as bases de aproximação no domínio dos elementos de maneira a respeitarem as condições de compatibilidade em todas as fronteiras essenciais (Dirichlet e interiores) do mesmo. No entanto, estes elementos não são localmente equilibrados, uma vez que apresentam descontinuidades  $C^0$  nos campos de tensões. Por seu lado, a formulação híbrida-Trefftz utiliza elementos que, não sendo nem localmente equilibrados, nem localmente compatíveis, oferecem uma estimativa bastante equilibrada no que toca à qualidade relativa dos campos da solução. Estes elementos constroem as bases de aproximação no domínio através de funções que satisfazem *a priori* todas as condições no mesmo, contendo, por isso, informação relevante relativa à física do problema. No entanto, os elementos híbridos-Trefftz não satisfazem as condições nas fronteiras do elemento, tornando-se necessária a imposição explícita da condição de compatibilidade, para o modelo de deslocamentos, nas fronteiras essenciais. Esta opção permite estabelecer de forma independente as aproximações dos deslocamentos no domínio dos elementos e das forças nas fronteiras essenciais da malha. A formulação adotada proporciona um sistema resolutivo simétrico e esparso, no qual os coeficientes não envolvem somatórios em domínios adjacentes, como acontece nos elementos finitos convencionais. Esta propriedade confere uma considerável flexibilidade na definição do modelo, uma vez que permite a utilização de bases de

refinamento diferentes em cada domínio e fronteira essencial.

De forma a validar o programa computacional desenvolvido, o mesmo foi utilizado para analisar uma estrutura com solução analítica conhecida, e os resultados obtidos com a sua utilização foram comparados com resultados obtidos por programas de cálculo automático comerciais que usam elementos finitos baseados na formulação convencional. Verificou-se que o programa de EFHT desenvolvido conseguiu recuperar a solução analítica com uma precisão na ordem de  $10^{-10}$  e os seus resultados foram coerentes com os do programa comercial, utilizando este último três vezes mais graus de liberdade e três vezes maior tempo computacional para a obtenção da mesma estimativa de qualidade. Depois de validado, o programa foi testado e aplicado a três casos de estudo mais complexos.

A avaliação do desempenho da formulação em modelos de maior grau de complexidade baseou-se na análise da influência dos refinamentos ' $p$ ' e ' $h$ ' no erro e na convergência das soluções de tensões, deslocamentos e energia de deformação.

As conclusões retiradas desta análise permitem atribuir uma maior eficiência ao refinamento ' $p$ ' quando comparado com o refinamento ' $h$ ', dado que para uma mesma qualidade da solução, o refinamento ' $p$ ' utiliza menos graus de liberdade do que o refinamento ' $h$ ', traduzido por um menor esforço computacional envolvido. No entanto, a maior eficiência do refinamento ' $p$ ' observa-se apenas até um certo nível de precisão da solução, a partir do qual subseqüentes melhorias apenas se podem obter com refinamento ' $h$ '. Assim, a melhor estimativa da solução é sempre obtida através da utilização de um refinamento conjunto ' $p$ ' e ' $h$ ', com a desvantagem da utilização de um maior esforço computacional.

Uma outra forma de avaliar a convergência dos modelos estudados é através da análise aos campos da solução, avaliando a recuperação das condições de fronteira impostas e da continuidade interelementar. Com esta análise, observou-se que as soluções obtidas em modelos mais refinados recuperam bem a continuidade de tensões e deslocamentos entre elementos adjacentes, ainda que para refinamentos mais grosseiros a qualidade da continuidade do campo de tensões seja inferior à qualidade da continuidade do campo de deslocamentos. Estas conclusões eram expectáveis, uma vez que o modelo adotado na formulação do presente trabalho está constrangido a satisfazer a continuidade dos deslocamentos, mas não a continuidade das tensões, o que tem um impacto visível na solução final. Constatou-se, igualmente, a recuperação das condições de fronteira estáticas e cinemáticas impostas explicitamente ao modelo, ainda que mais rapidamente para os campos de deslocamento, facto também expectável, dado que as condições foram impostas de formas distintas.

Comparando, agora, as soluções obtidas pelas formulações híbridas-Trefftz e convencional, observou-se que a utilização de elementos híbridos-Trefftz permite a obtenção de uma convergência muito mais rápida das soluções e com recurso a menos graus de liberdade que a utilização de elementos finitos convencionais. Para além disso, os EFHT permitem calcular todos os termos do sistema resolutivo através de integrais na fronteira e não no volume, como os elementos finitos convencionais. Os processos utilizados na implementação dos EFHT, mesmo sendo mais complexos e utilizando um número mais elevado de pontos de integração nas fronteiras (devido à maior complexidade das bases de aproximação), não comprometem, no entanto, o tempo computacional,

sendo este ainda inferior ao utilizado pela formulação baseada em elementos finitos convencionais. No entanto, a utilização de EFHT conduz a sistemas resolventes mais instáveis (números de condição elevados), que requerem, frequentemente, a aplicação de pré-condicionadores. Ademais, a flexibilidade na definição das bases de aproximação em cada elemento e fronteira essencial pode exprimir-se numa tarefa difícil para um utilizador inexperiente.

## 6.2 Desenvolvidos futuros

Completo o trabalho desta dissertação, reside ainda o potencial desenvolvimento de uma série de pontos de interesse relacionados com o tema abordado. Partindo da descrição da ferramenta computacional desenvolvida, apresentada no capítulo 4, sugerem-se algumas linhas de trabalho para uma futura expansão que vise torná-la ainda mais completa,

- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz para a análise dinâmica de problemas de elasticidade plana;
- Implementação de procedimentos de refinamento ' $p$ '-adaptativo para permitir a utilização da plataforma computacional por utilizadores inexperientes;
- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz para a análise estática e dinâmica de problemas de elasticidade tridimensional;
- Inserção na plataforma computacional de formulações de elementos finitos híbridos e híbridos-mistos para a análise de problemas de elasticidade plana;
- Implementação de uma interface gráfica à aplicação estrutural desenvolvida.



# Referências

- [1] P. Delage, “Risk in civil engineering: From natural to man-made hazards”, *France-Stanford Conference on ‘Risk issues in contemporary science and engineering’*, 2003.
- [2] M. Teixeira, “Reabilitação de edificios pombalinos. análise experimental de paredes de frontal”, MSc Thesis, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2010.
- [3] R. Cardoso, M. Lopes e R. Bento, “Vulnerabilidade sísmica de um edifício pombalino”, *Sísmica 2004-6º Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica. Lisboa*, pp. 921–930, 2004.
- [4] G. Celani e C. Vaz, “Cad scripting and visual programming languages for implementing computational design concepts: A comparison from a pedagogical point of view”, *International Journal of Architectural Computing*, vol. 10, nº 1, pp. 121–138, 2012.
- [5] M. Emmer, “Architecture and mathematics: Soap bubbles and soap films”, *Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future*, pp. 449–458, 2015.
- [6] P. Cruz, “The outstanding legacy of edgar cardoso: An audacious and visionary portuguese bridge engineer”, *7th International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management*, 2014.
- [7] J. Almeida, “Modelo de campos de tensões para betão estrutural - aplicação ao projecto de diafragmas de tabuleiros de pontes”, MSc Thesis, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2012.
- [8] S. Narciso, “Determinação de modelos de escoras e tirantes para a análise de estruturas de betão armado”, MSc Thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2009.
- [9] A. Love, “A treatise on the mathematical theory of elasticity”, *Cambridge University Press*, vol. 1, 2013.
- [10] E. Oliveira, *Elementos da teoria da elasticidade*. IST Press Lisboa, 2007.
- [11] I. Moldovan, “Hybrid-Trefftz finite elements for elastodynamic analysis of saturated porous media”, Phd Thesis, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2007.
- [12] R. Courant, “Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, nº 1, pp. 1–23, 1943.

- [13] J. Greenstadt, "On the reduction of continuous problems to discrete form", *IBM Journal of Research and Development*, vol. 3, n° 4, pp. 355–363, 1959.
- [14] R. Clough, "The finite element method in plane stress analysis", *Conference on Electronic Computation*, 1960.
- [15] M. Turner, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 23, pp. 805–823, 1956.
- [16] J. Argyris, "Energy theorems and structural analysis: A generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and non-linear stress-strain relations part I. general theory", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 27, n° 2, pp. 42–58, 1955.
- [17] O. Zienkiewicz e Y. Cheung, "Finite elements in the solution of field problems", *The Engineer*, pp. 507–510, 1965.
- [18] O. Zienkiewicz, "The finite element method in structural and continuum mechanics: Numerical solution of problems in structural and continuum mechanics", *McGraw-Hill*, 1967.
- [19] J. Synge, "Triangulation in the hypercircle method for plane problems", *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 54, pp. 341–367, 1951.
- [20] O. Zienkiewicz e R. Taylor, *The Finite Element Method Basic Formulation and Linear Problems*. McGraw-Hill, 1989.
- [21] B. Irons e A. Razzaque, "Experience with the patch test for convergence of finite elements", *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, pp. 557–587, 1972.
- [22] D. Veubeke e B. Fraeijs, "Variational principles and the patch test", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, n° 4, pp. 783–801, 1974.
- [23] R. Bank e T. Dupont, "An optimal order process for solving finite element equations", *Mathematics of Computation*, vol. 36, n° 153, pp. 35–51, 1981.
- [24] O. Zienkiewicz e D. Phillips, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by 'isoparametric' co-ordinates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, n° 4, pp. 519–528, 1971.
- [25] M. Piteri, "Geração automática de malhas hierárquico-adaptativas em domínios bidimensionais e tridimensionais", PhD Thesis, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 1998.
- [26] E. Trefftz, "Ein gegenstück zum ritzschen verfahren", *2nd International Congress on Applied Mechanics*, pp. 131–137, 1926.
- [27] E. Stein, "Die kombination des modifizierten Trefftzschen verfahrens mit der methode der finiten elemente", *Finite Elemente in der Statik*, pp. 172–185, 1973.

- 
- [28] J. Jirousek, "Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 14, n° 1, pp. 65–92, 1978.
- [29] I. Herrera, "Boundary methods: A criterion for completeness", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 77, n° 8, pp. 4395–4398, 1980.
- [30] Y. Cheung, W. Jin e O. Zienkiewicz, "Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions", *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 5, n° 3, pp. 159–169, 1989.
- [31] Y. Cheung, W. Jin e O. Zienkiewicz, "Solution of Helmholtz equation by Trefftz method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n° 1, pp. 63–78, 1991.
- [32] W. Jin, Y. Cheung e O. Zienkiewicz, "Application of the Trefftz method in plane elasticity problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, n° 6, pp. 1147–1161, 1990.
- [33] A. Zielinski e O. Zienkiewicz, "Generalized finite element analysis with t-complete boundary solution functions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, n° 3, pp. 509–528, 1985.
- [34] V. Leitão, "Applications of multi-region Trefftz-collocation to fracture mechanics", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 22, n° 3, pp. 251–256, 1998.
- [35] J. Jirousek e L. Guex, "The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, n° 4, pp. 651–693, 1986.
- [36] J. Jirousek e M. N'Diaye, "Solution of orthotropic plates based on p-extension of the hybrid-Trefftz finite element model", *Computers & Structures*, vol. 34, n° 1, pp. 51–62, 1990.
- [37] J. Jirousek, A. Wroblewski, Q. Qin e X. He, "A family of quadrilateral hybrid-Trefftz p-elements for thick plate analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 127, n° 1, pp. 315–344, 1995.
- [38] J. Jirousek, A. Wroblewski e B. Szybiński, "A new 12 dof quadrilateral element for analysis of thick and thin plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, n° 15, pp. 2619–2638, 1995.
- [39] I. Piltner, "The application of a complex 3-dimensional elasticity solution representation for the analysis of a thick rectangular plate", *Acta Mechanica*, vol. 75, n° 1-4, pp. 77–91, 1988.
- [40] Q. Qin, "Hybrid-Trefftz finite element method for reissner plates on an elastic foundation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 122, n° 3, pp. 379–392, 1995.
- [41] Q. Qin, "Postbuckling analysis of thin plates by a hybrid Trefftz finite element method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 128, n° 1, pp. 123–136, 1995.

- [42] J. Petrolito, “Hybrid-Trefftz quadrilateral elements for thick plate analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 78, n° 3, pp. 331–351, 1990.
- [43] C. Fernandes e V. Leitão, “On a multi-region Trefftz collocation method for plate bending”, *IV World Congress on Computational Mechanics*, 1998.
- [44] J. Freitas e C. Cismaşiu, “Formulation of hybrid-Trefftz displacement elements”, *Advances in Finite Element Technology*, Topping B.H.V. (ed.). Civil-Comp Press, Edinburgh, pp. 195–202, 1996.
- [45] J. Freitas, “Formulation of elastostatic hybrid-Trefftz stress elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, n° 1, pp. 127–151, 1998.
- [46] J. Freitas, C. Cismaşiu e Z. Wang, “Comparative analysis of hybrid-Trefftz stress and displacement elements”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 6, n° 1, pp. 35–59, 1999.
- [47] J. Freitas, C. Cismaşiu e Z. Wang, “Numerical applications with hybrid-Trefftz stress and displacement elements”, *Strojnický Casopis*, vol. 50, n° c. 2, pp. 73–95, 1999.
- [48] J. Freitas e F. Bussamra, “Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n° 5, pp. 927–950, 2000.
- [49] F. Bussamra, P. Pimenta e J. Freitas, “Elementos finitos híbridos-Trefftz para análise elasto-plástica de sólidos tridimensionais”, *XX CILAMCE. 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 1999.
- [50] C. Cismaşiu, “The hybrid-Trefftz displacement element for static and dynamic structural analysis problems”, Phd Thesis, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2000.
- [51] J. Freitas, “Hybrid finite element formulations for elastodynamic analysis in the frequency domain”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, n° 13, pp. 1883–1923, 1999.
- [52] J. Freitas e Z. JI, “Hybrid-Trefftz finite element formulation for simulation of singular stress fields”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, n° 2, pp. 281–308, 1996.
- [53] I. Piltner, “Special finite elements with holes and internal cracks”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, n° 8, pp. 1471–1485, 1985.
- [54] P. Tong, T. Pian e S. Lasry, “A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, n° 3, pp. 297–308, 1973.
- [55] K. Lin e P. Tong, “Singular finite elements for the fracture analysis of v-notched plate”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, n° 9, pp. 1343–1354, 1980.
- [56] J. Freitas e C. Cismaşiu, “Hybrid-Trefftz displacement element for spectral elastodynamics of two-phase media”, *Internal Report, ICIST, Instituto Superior Técnico*, 2001.



- 
- [57] J. Freitas e C. Cismaşiu, “Adaptive p-refinement of hybrid-Trefftz finite element solutions”, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, n° 11, pp. 1095–1121, 2003.
- [58] A. Jesus, I. Cismasiu e J. Freitas, “Fully automatic p-adaptive hybrid-Trefftz displacement elements”, *CMNE 2011: Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia*, 2011.
- [59] I. Moldovan, D. Cao e J. Freitas, “Hybrid-Trefftz stress element for biphasic elastostatics”, *CMNE 2011: Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia*, 2011.
- [60] J. Freitas, I. Moldovan e M. Toma, “Mixed and hybrid stress elements for biphasic media”, *Computers & structures*, vol. 88, n° 23, pp. 1286–1299, 2010.
- [61] C. Branco, *Mecânica dos materiais*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2011.
- [62] V. da Silva, *Mecânica e resistência dos materiais*. Zuari, 2004.
- [63] S. Timoshenko e J. Goodier, *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1951.
- [64] F. Teixeira-Dias, J. Pinho-da Cruz, R. Valente e R. de Sousa, *Método dos Elementos Finitos- Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia*. 1a. ed. ETEP-Edições Técnicas e Profissionais, 2010.
- [65] M. Marques e P. Teixeira, *Mecânica dos Meios Contínuos*. Faculdade de Engenharia da Universidade Católica Portuguesa, 2005.
- [66] J. Freitas, J. de Almeida e E. Pereira, “Non-conventional formulations for the finite element method”, *Computational Mechanics*, vol. 23, n° 5-6, pp. 488–501, 1999.
- [67] Á. Azevedo, *Método dos elementos finitos*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- [68] H. Pina, *Métodos numéricos*. Escolar Editora, 2010.
- [69] M. Shephard, Q. Niu e P. Baehmann, “Some results using stress projectors for error indication and estimation”, *Adaptive Methods for Partial Differential Equations*, pp. 83–99, 1989.
- [70] C. de Souza e S. Proença, “A hybrid-Trefftz formulation for plane elasticity with selective enrichment of the approximations”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 27, n° 5, pp. 785–804, 2009.

## REFERÊNCIAS

---

## Anexo A

# Método dos resíduos pesados

Neste anexo apresenta-se o método matemático utilizado no presente trabalho para a imposição das equações governativas do problema de elasticidade plana.

Os problemas físicos, em particular os problemas de elasticidade plana, são regidos por equações diferenciais e condições de fronteira. Definindo de uma forma genérica o problema físico, este pode ser descrito matematicamente por equações diferenciais do tipo

$$\mathcal{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \text{ no domínio } V \quad (\text{A.1})$$

em que  $\mathcal{L}$  representa um operador diferencial genérico,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  o campo cuja aproximação é o objetivo do método e  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  uma função conhecida, definida no domínio  $V$ . Em particular, no caso da equação diferencial de Navier (2.22),  $\mathcal{L}$  é definido como  $(\mathbf{D}\mathbf{k}\mathbf{D}^*)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  é o campo de deslocamentos e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

A equação (A.1) é tipicamente complementada pelas condições de fronteira apropriadas para a situação em concreto que se esteja a resolver, como no caso de problemas elastostáticos, em que as condições  $(xx)$  e  $(yy)$  representam as condições de compatibilidade e equilíbrio nas fronteiras de Dirichlet e Neumann, respetivamente. A solução exata do problema implica que a equação (A.1) e as condições de fronteira sejam satisfeitas localmente, isto é, em todos os pontos interiores do domínio  $V$  e em todos os pontos da fronteira. Contudo, nem todos os problemas físicos existentes têm solução analítica conhecida, tornando-se por isso necessária a utilização de métodos de aproximação, como é exemplo o método adotado no presente trabalho, o método dos elementos finitos.

Os métodos aproximados devolvem uma solução do problema que não satisfaz integralmente a equação diferencial original. Assim, define-se como resíduo  $\mathbf{R}$  a função que traduz o erro de aproximação da solução aproximada ( $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ ),

$$\mathbf{R} = \mathcal{L}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}), \text{ no domínio } V \quad (\text{A.2})$$

A solução aproximada  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  é definida, tipicamente, como uma combinação linear de funções pertencentes a uma base de aproximação,

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) a_i \quad (\text{A.3})$$

Na equação (A.3), os termos  $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$  representam as funções da base de aproximação do campo  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ ,  $a_i$  os coeficientes correspondentes e  $n$  a ordem da base de aproximação [20].

De notar que a obtenção de soluções aproximadas deve ser realizada de forma a tornar o resíduo tão reduzido quanto possível. De forma a impor esta condição, desenvolveram-se diferentes métodos, entre os quais, o método dos resíduos pesados [68].

O método dos resíduos pesados tem como ideia base anular o resíduo (A.2) em média ponderada. Para tal, a imposição da satisfação das equações do problema é feita usando um conjunto arbitrário de funções de peso (ou teste)  $\mathbf{W}_j(\mathbf{x})$ , tal que,

$$\int_V \mathbf{W}_j(\mathbf{x}) \mathbf{R} dV = \int_V \mathbf{W}_j(\mathbf{x}) (\mathcal{L}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) dV = \mathbf{0}, \text{ para } j = 1, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

Desta forma, o problema original é substituído por  $n$  problemas do tipo,

$$\int_V \mathbf{W}_j(\mathbf{x}) \mathcal{L}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dV = \int_V \mathbf{W}_j(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV \quad (\text{A.5})$$

em regra, tantas quantas funções de aproximação existirem na base  $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$ .

Se a forma fraca (A.5) for satisfeita para toda e qualquer função de peso  $\mathbf{W}_j(\mathbf{x})$ , a mesma é equivalente à forma forte (A.1). Então, a solução da forma forte é sempre solução da forma fraca, enquanto que o contrário não é necessariamente verdade.

Na prática, é de interesse uniformizar a ordem de diferenciação das funções das bases de aproximação  $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$  e de teste  $\mathbf{W}_j(\mathbf{x})$ . As duas bases são essencialmente de livre escolha e, portanto, as mesmas são muitas vezes idênticas, pelo que ter restrições de diferenciabilidade distintas aplicadas a cada uma torna-se pouco justificável. Para realizar esta uniformização, o termo do lado esquerdo da forma fraca apresentada na expressão (A.5) é integrado por partes, resultando,

$$\int_V \mathbf{W}_j(\mathbf{x}) \mathcal{L}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dV = \sum_{i=1}^n \int_V (\tilde{\mathcal{L}}\mathbf{W}_j(\mathbf{x})) (\tilde{\mathcal{L}}^T \mathbf{N}_i(\mathbf{x})) dV a_i + \mathbf{t}\mathbf{f} \quad (\text{A.6})$$

onde  $\mathbf{t}\mathbf{f}$  é a designação genérica de termos de fronteiras, cuja presença permite ainda a imposição de condições de fronteira, e  $\tilde{\mathcal{L}}$  e  $\tilde{\mathcal{L}}^T$  são novos operadores diferenciais, de ordens mais reduzidas que o operador original  $\mathcal{L}$ .

Qualquer conjunto de funções linearmente independentes pode ser proposto como base de teste para a construção da forma fraca (A.6). Dos diversos métodos existentes que visam propor estas funções, no presente trabalho, utiliza-se o método de Galerkin.

O método de Galerkin define as funções de peso  $\mathbf{W}_j(\mathbf{x})$  como sendo idênticas às funções  $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$  da base de aproximação do campo  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ .

A utilização deste método conduz muitas vezes a sistemas resolutivos simétricos, o que constitui uma vantagem significativa em termos computacionais. No entanto, a utilização da formulação fraca, no caso o método de Galerkin, não permite conhecer de forma exata os pontos do domínio onde o resíduo é nulo, dado que este é anulado em média. Assim, não é possível controlar os pontos onde se pretende obter mais qualidade na solução, ao contrário, por exemplo, do método da colocação, no qual as equações governativas são impostas em pontos pré-definidos.

## Anexo B

# Funções do programa

Neste anexo apresentam-se sucintamente as funções constituintes do programa desenvolvido.

- **Main** : funciona como centro de comando do programa. Efetua chamadas às outras funções, bem como o pré-condicionamento e a resolução do sistema governativo. Não recebe dados de entrada nem devolve dados de saída.
- **Input\_Proc**: função que recebe os dados de entrada do utilizador e gera as estruturas de dados necessárias ao programa. Funciona também como ficheiro de dados de entrada do programa, onde o utilizador insere todas as informações sobre a geometria da estrutura, características do material, condições de fronteira, malha de elementos finitos e as respetivas bases de aproximação. Não recebe dados de entrada da função **Main**, e devolve à função **Main** as estruturas **Edges**, **Loops** e **BConds**, a matriz **Nodes**, o número de pontos de Gauss-Legendre a utilizar na integração numérica (NGP) e o número de divisões em que se pretende dividir o domínio para a representação gráfica dos campos da solução, (**NoDiv**).
- **AssignParts** : serve para definir e alocar memória para os pontos de entrada de cada bloco do sistema resolutivo. Recebe as estruturas **Edges**, **Loops** e **BConds** e devolve à função **Main** as estruturas **Edges** e **Loops**, acrescidas de dois membros referentes ao ponto de inserção e dimensão de cada bloco, e a dimensão total do sistema, **Dim**.
- **ComputeFields** : serve para a construção da solução aproximada e a representação gráfica dos campos de deslocamentos e tensões. Recebe as estruturas **Edges** e **Loops**, a matriz **Nodes**, o número de divisões em que se pretende dividir o domínio, **NoDiv**, e o vetor dos coeficientes **X**, determinado pela resolução do sistema governativo, e devolve à função **Main** os campos da solução representados graficamente, **Ux**, **Uy**, **Sx**, **Sy** e **Sxy**.
- **K<sub>ij</sub>** : representa um conjunto de 10 funções, com  $\{i, j\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Cada função calcula um bloco da matriz de rigidez do sistema resolutivo, realizando as transformações de referenciais e os processos de integração numérica necessários. O índice  $i$  é referente aos modos de deslocamento da base  $\Psi$  e o índice  $j$  é referente aos modos de tensões da base **S**. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, a matriz dos coeficientes *left-hand*

*side* (**LHS**), que contempla a parte à esquerda do sistema resolutivo, o vetor das abscissas de Gauss-Legendre **abscissa** e o vetor dos pesos de Gauss **weight**, e devolve à função Main a matriz **LHS** preenchida pelos respectivos blocos da matriz de rigidez.

- $B_i$  : representa um conjunto de cinco funções, com  $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Cada função calcula um bloco da matriz de fronteira do sistema resolutivo, realizando as compatibilizações de sistema de referência e os processos de integração numérica necessários. O índice  $i$  é referente aos modos de deslocamento da base  $\Psi$ . Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, a matriz **LHS**, o vetor das abscissas de Gauss-Legendre **abscissa** e o vetor dos pesos de Gauss **weight**, e devolve à função Main a matriz **LHS** preenchida pelos respectivos blocos da matriz de fronteira.
- $T_i$  : representa um conjunto de cinco funções, com  $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Cada função calcula um bloco do vetor das forças aplicadas nas fronteiras de Neumann, separadamente para cada direção, a inserir no lado direito do sistema resolutivo, realizando as compatibilizações de sistema de referência e os processos de integração numérica necessários. O índice  $i$  é referente aos modos de deslocamento da base  $\Psi$ . Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges**, **Loops** e **BConds**, o vetor *right-hand side* (**RHS**), que contempla a parte à direita do sistema resolutivo, o vetor das abscissas de Gauss-Legendre **abscissa** e o vetor dos pesos de Gauss **weight**, e devolve à função Main o vetor **RHS** preenchido pelos respectivos termos da matriz de fronteira.
- $U$  : calcula o vetor dos deslocamentos generalizados nas fronteiras de Dirichlet a inserir no lado direito do sistema resolutivo, realizando os processos de integração numérica necessários. O vetor  $U$  é determinado separadamente para cada direção onde são impostos deslocamentos. Nas fronteiras interiores, o vetor  $U$  é nulo. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges**, **Loops** e **BConds**, a matriz **RHS**, o vetor das abscissas de Gauss-Legendre **abscissa** e o vetor dos pesos de Gauss **weight**, e devolve à função Main a matriz **RHS** preenchida pelos respectivos termos do vetor dos deslocamentos aplicados.
- **Strain\_Energy** : é utilizada para determinar a energia de deformação do sistema. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges**, a matriz **LHS**, o vetor dos coeficientes **X**, e devolve à função Main o valor da energia de deformação, **Energy**.
- **Gauleg** : rotina de biblioteca, gera as abscissas e os pesos dos pontos de integração de Gauss-Legendre. Recebe como dados de entrada o número de pontos de Gauss-Legendre **NGP** e o intervalo de integração  $[-1, 1]$ , e devolve à função Main o vetor das abscissas de Gauss-Legendre **abscissa** e o vetor dos pesos de Gauss, **weight**.
- **GenerateMesh** : função que gera a malha regular de elementos retangulares do modelo. Recebe como dados de entrada as dimensões geométricas que o utilizador define para o modelo em  $x$ , **dim\_x**, e em  $y$ , **dim\_y**, e o número de elementos que pretende ter na direção  $x$ , **nloops\_x**, e  $y$ , **nloops\_y**, e devolve à função **Input\_Proc** os dados topológicos do modelo, **Nodes**, **edges\_loops**, **edges\_nodes**, **loops\_nodes** e **loops\_edges**.

## Anexo C

# Sistemas de referência

Neste anexo apresentam-se algumas relações de transformação dos sistemas de referência utilizados neste trabalho, com o objetivo de incrementar a legibilidade do código desenvolvido e facilitar, assim, futuras extensões.

### C.1 Mudança do referencial da fronteira para o referencial local polar

Conhecidas as abscissas  $a_g$  da quadratura de Gauss-Legendre no referencial da fronteira  $s$  e as funções da base de aproximação  $\Psi$  no referencial local polar  $(r, \theta)$ , para o processo de integração numérica realizado nas fronteiras dos elementos é necessário calcular o valor das funções da base  $\Psi$  em cada uma das abscissas. Desta forma, é necessário determinar as coordenadas  $r$  e  $\theta$  correspondentes a cada abscissa  $a_g$ . Para realizar a transformação de coordenadas do referencial  $s$  pertencente ao intervalo  $[-1, 1]$  para o referencial  $(r, \theta)$  do elemento, utiliza-se a informação guardada na matriz **Edges.parametric**.

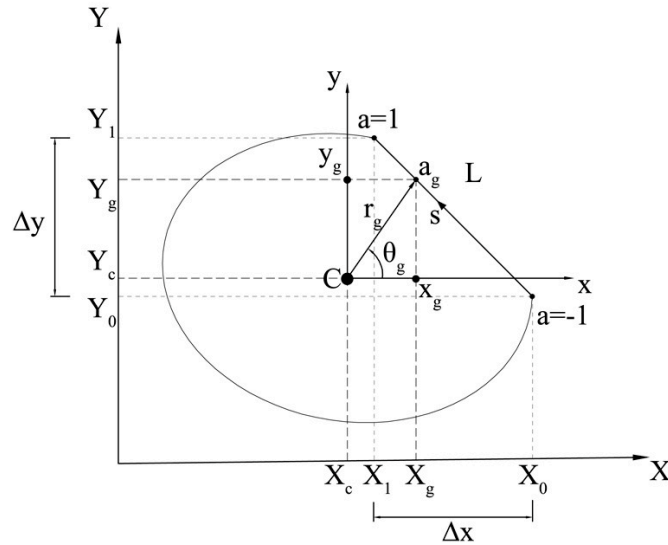
Com efeito, através da expressão paramétrica da fronteira, é possível identificar as coordenadas no referencial global  $(X, Y)$  de qualquer ponto pertencente à mesma, cuja coordenada  $a_g$  seja conhecida.

Na figura C.1 apresenta-se um elemento genérico, onde se ilustra uma fronteira de comprimento  $L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  onde são conhecidas as abscissas de Gauss-Legendre  $a_g$ .

Na mesma figura,  $X_c$  e  $Y_c$  representam as coordenadas da origem do referencial local do elemento no referencial global da estrutura, e  $X_0, Y_0$  e  $X_1, Y_1$  representam as coordenadas dos pontos inicial e final da fronteira, medidas no referencial global. Os valores de  $X_0, Y_0, \Delta x$  e  $\Delta y$  são denominados de dados paramétricos da fronteira e são guardados, na geração da malha, na matriz **Edges.parametric**.

Os dados paramétricos da fronteira permitem determinar as coordenadas  $X_g$  e  $Y_g$  da abscissa de Gauss-Legendre  $a_g$  no referencial global, através das seguintes expressões,

$$\begin{cases} X_g = X_0 + \frac{1}{2}(a_g + 1)\Delta x \\ Y_g = Y_0 + \frac{1}{2}(a_g + 1)\Delta y \end{cases} \quad (C.1)$$



**Figura C.1:** Transformação do referencial da fronteira  $s$  para o referencial local polar  $(r, \theta)$ .

Conhecidos  $X_g$ ,  $Y_g$ ,  $X_c$  e  $Y_c$ , as coordenadas do ponto de Gauss-Legendre no referencial local Cartesiano  $(x, y)$  são,

$$\begin{cases} x_g = X_g - X_c \\ y_g = Y_g - X_c \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Finalmente, a transformação do referencial local Cartesiano para o referencial local polar faz-se da seguinte forma,

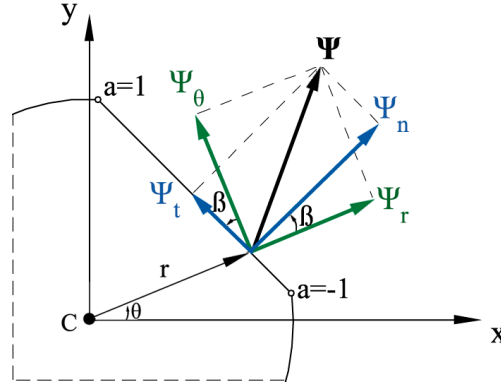
$$\begin{cases} r_g = \sqrt{x_g^2 + y_g^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y_g}{x_g}\right) \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

## C.2 Compatibilização do referencial local polar com o referencial normal-tangencial da fronteira

Nas fronteiras essenciais, a determinação dos valores referentes à matriz  $\mathbf{B}$  e ao vetor  $\overline{\mathbf{t}}_{\Gamma}$  nas abscissas de Gauss-Legendre, para além da transformação de coordenadas demonstrada na secção C.1, necessita ainda de um processo de compatibilização dos referenciais. Assim, e conforme ilustrado na figura C.2, aplica-se uma rotação  $\beta$  ao referencial local polar  $(r, \theta)$  para calcular as componentes dos termos da base de ponderação  $\Psi$  no referencial normal-tangencial à fronteira  $(n, t)$ .

O referencial  $(n, t)$  é definido de maneira a que o eixo  $n$  tenha a direção normal à fronteira e orientação para fora do elemento, enquanto que o eixo  $t$  tenha a direção e orientação da fronteira.





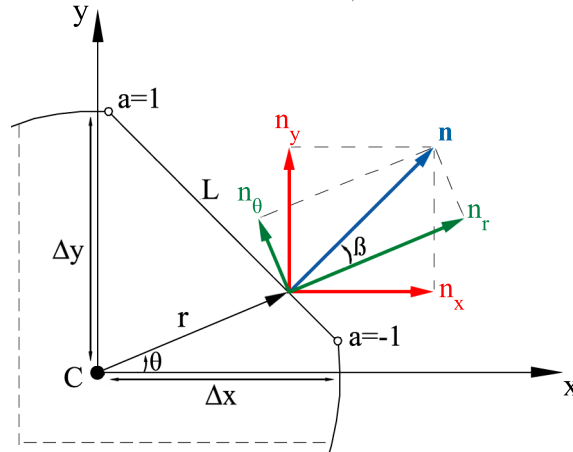
**Figura C.2:** Transformação do referencial local polar  $(r, \theta)$  para o referencial normal-tangencial à fronteira  $(n, t)$ .

Considerem-se conhecidas as componentes  $\Psi_r$  e  $\Psi_\theta$  do termo genérico  $\Psi$  da base de aproximação aos deslocamentos no referencial  $(r, \theta)$  no qual a base é definida. Pretende-se obter um algoritmo que permita calcular as componentes  $\Psi_n$  e  $\Psi_t$  do termo  $\Psi$  no referencial da fronteira,  $(n, t)$ . Assim, a base  $\Psi$  no referencial  $(n, t)$  obtém-se da seguinte forma,

$$\begin{pmatrix} \Psi_n \\ \Psi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_r \\ \Psi_\theta \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

Torna-se então evidente a necessidade de determinar o ângulo  $\beta$ . Para tal, utiliza-se a compatibilização entre o referencial local Cartesiano  $(x, y)$  e o referencial local polar  $(r, \theta)$ .

Na figura C.3 representa-se geometricamente a normal unitária à fronteira, as suas componentes nos referenciais locais  $(x, y)$  e  $(r, \theta)$ , e o ângulo  $\beta$ , cujo seno e cosseno se propõem determinar.



**Figura C.3:** Transformação do referencial local Cartesiano  $(x, y)$  para o referencial local polar  $(r, \theta)$ .

Pela análise da figura C.3 e sabendo que  $|\mathbf{n}| = 1$ , conclui-se que,

$$\begin{cases} \cos \beta = n_r \\ \sin \beta = n_\theta \end{cases} \quad (C.5)$$

Substituindo as expressões (C.5) na definição (C.4), resulta,

$$\begin{pmatrix} \Psi_n \\ \Psi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_r & n_\theta \\ -n_\theta & n_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_r \\ \Psi_\theta \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

Torna-se necessário agora calcular  $n_r$  e  $n_\theta$ . Para tal, conhecendo o ângulo  $\theta$  (equação C.3) e de acordo com a figura C.3, obtém-se,

$$\begin{cases} n_x = \frac{\Delta y}{L} \\ n_y = -\frac{\Delta x}{L} \end{cases} \quad (C.7)$$

Sabendo o vetor das normais unitárias  $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$  do referencial local Cartesiano, determina-se o vetor das normais unitárias  $\begin{pmatrix} n_r \\ n_\theta \end{pmatrix}$  do referencial local polar, através da rotação  $\theta$  do referencial  $(x, y)$ ,

$$\begin{pmatrix} n_r \\ n_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \quad (C.8)$$

De acordo com a equação (C.6), a definição (C.4) resulta em,

$$\begin{cases} \Psi_n = n_r \Psi_r + n_\theta \Psi_\theta \\ \Psi_t = -n_\theta \Psi_r + n_r \Psi_\theta \end{cases} \quad (C.9)$$

em que,

$$\begin{cases} n_r = n_x \cos\theta + n_y \sin\theta \\ n_\theta = -n_x \sin\theta + n_y \cos\theta \end{cases} \quad (C.10)$$

A definição (C.9) representa a base  $\Psi$  expressa no referencial  $(n, t)$  e desta forma, torna-se possível determinar a matriz da fronteira  $\mathbf{B}$  e o vetor  $\overline{\mathbf{t}}_F$  das forças aplicadas, através das expressões apresentadas na secção 3.3.2.

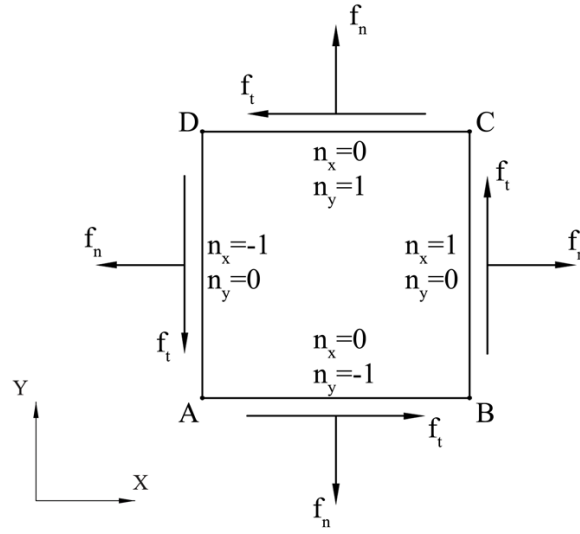
Relativamente à matriz  $\mathbf{K}$  e ao vetor  $\overline{\mathbf{u}}_F$ , a sua determinação não requer compatibilização dos sistemas de referência dos seus termos, uma vez que estes estão expressos nos mesmos referenciais.

### C.3 Transformações de tensões e deslocamentos

Na representação gráfica dos campos, a solução é referenciada no referencial global Cartesiano  $(X, Y)$ . No entanto, as condições de fronteira impostas ao modelo são definidas no referencial normal-tangencial à fronteira  $(n, t)$ . Torna-se, assim, necessário definir as expressões através das quais as tensões e os deslocamentos expressos no referencial  $(x, y)$  de cada elemento se podem transformar em forças e deslocamentos no referencial  $(n, t)$ . As transformações aqui apresentadas

revelam-se ainda de considerável importância para o utilizador, uma vez que as mesmas permitem definir os sentidos convencionalmente positivos das condições de fronteira.

Assim, na figura C.4 apresenta-se a convenção positiva dos sinais adotada para a definição das forças aplicadas ao modelo, sendo a transformação das tensões para as forças de fronteira expressa de acordo com a equação (C.11).

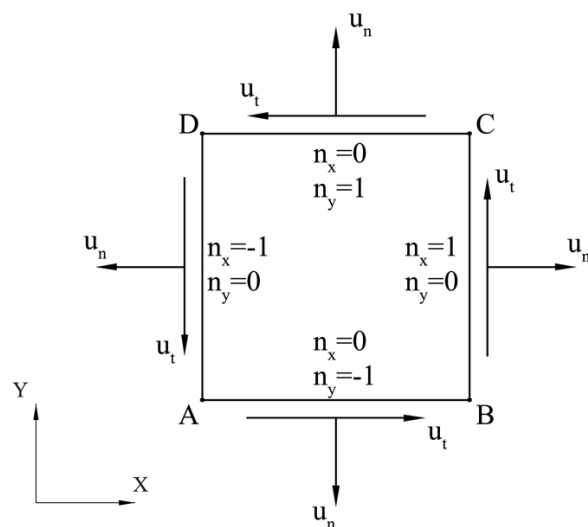


**Figura C.4:** Convenção de sinais positivos para as forças aplicadas.

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x^2 \sigma_x + n_y^2 \sigma_y + 2n_x n_y \tau_{xy} \\ n_x n_y (-\sigma_x + \sigma_y) + (n_x^2 - n_y^2) \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (C.11)$$

Na figura C.5, apresenta-se a convenção positiva dos sinais adotada para a definição dos deslocamentos impostos ao modelo, sendo a transformação de referenciais para a aplicação dos deslocamentos expressa de acordo com a equação (C.12).

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x u_x + n_y u_y \\ -n_y u_x + n_x u_y \end{pmatrix} \quad (C.12)$$



**Figura C.5:** Convenção de sinais positivos para os deslocamentos aplicados.

## Anexo D

# Exemplo de utilização do software

Neste anexo apresenta-se um exemplo da aplicação do programa de EFHT desenvolvido no presente trabalho, na ótica do utilizador. Para tal, exemplifica-se o caso de uma placa em estado de tensão plana, sujeita tanto a forças como a deslocamentos impostos e discretizada em quatro elementos finitos retangulares.

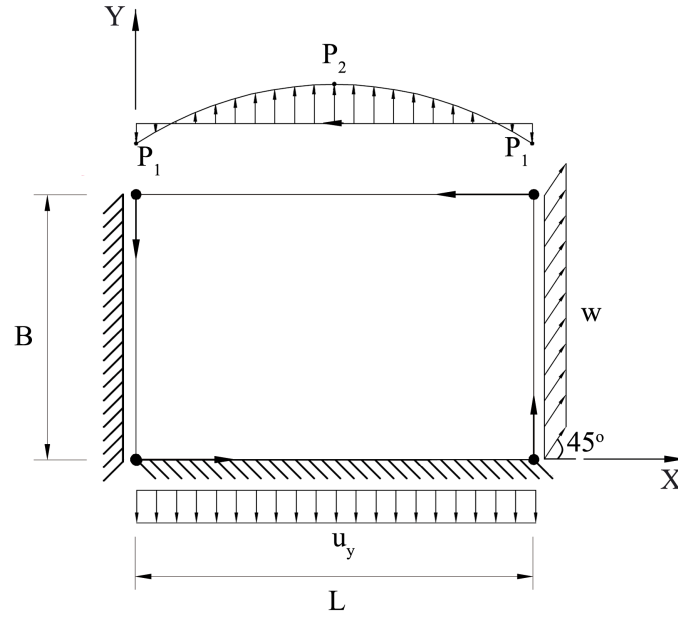
### D.1 Descrição do problema

A estrutura analisada é uma placa retangular de dimensões  $L = 3$  e  $B = 2$ , conforme apresentado na figura D.1. A placa, considerada em estado de tensão plana, é sujeita a uma carga inclinada  $w = 10$  uniformemente distribuída na fronteira  $X = L$  e a uma carga parabólica  $P$  ( $P_1 = -3$  e  $P_2 = 20$ ) na fronteira  $Y = B$ . Na fronteira  $X = 0$  existe um apoio do tipo encastramento deslizante ( $u_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ ), enquanto que na fronteira  $Y = 0$  são aplicados os deslocamentos  $u_x = 0$  e  $u_y = 1$ . O material que compõe a placa é caracterizado pelos parâmetros  $E = 30$  e  $\nu = 0.2$ .

### D.2 Dados de entrada

Para a definição do modelo no programa de EFHT, o utilizador deve seguir os seguintes passos:

- Definição das propriedades mecânicas do material;
- Definição da malha usada para discretizar o modelo (refinamento ' $h$ ');
- Definição dos níveis de refinamento ' $p$ ' do modelo, nomeadamente em cada domínio e fronteira essencial;
- Definição das condições de fronteira do modelo;
- Definição do número de pontos de Gauss que pretende utilizar para integração numérica;
- Definição do número de divisões em que pretende dividir o domínio para a representação gráfica dos resultados da análise.



**Figura D.1:** Modelo em estudo.

De notar que todos os dados de entrada são inseridos no programa pelo utilizador na função `Input_Proc`.

### D.2.1 Definição das propriedades mecânicas do material

Inicialmente, o utilizador deve definir as propriedades mecânicas dos materiais que compõem o modelo. Para o elemento  $i$ , definem-se o módulo de Young,  $E$  (`Loops.materials(i,1)`) e o coeficiente de Poisson,  $\nu$  (`Loops.materials(i,2)`). Define-se ainda o tipo de problema que se pretende resolver, nomeadamente estado de tensão plana (ETP),  $PS = 1$ , ou estado de deformação plana (EDP),  $PS = 2$ .

Para o exemplo em estudo definem-se os seguintes parâmetros,

$$\begin{cases} \text{Loops.materials}(:,1) = 30 \\ \text{Loops.materials}(:,2) = 0.2 \\ PS = 1 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

### D.2.2 Definição da malha

Para definir a malha, o utilizador deve inserir a dimensão e o número de elementos que pretende que a mesma tenha. Ilustra-se de seguida o processo de definição da malha do modelo apresentado na figura D.1.

O utilizador deve começar por definir as dimensões em  $x$  e  $y$  do modelo que pretende discretizar,

$$\begin{cases} \text{dim\_x} &= 3 \\ \text{dim\_y} &= 2 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Atribuídas as dimensões do modelo, o utilizador deve definir em quantos elementos pretende discretizar o mesmo na direção  $x$  e  $y$ , neste caso,

$$\begin{cases} \text{nloops\_x} &= 2 \\ \text{nloops\_y} &= 2 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

### D.2.3 Definição dos níveis de refinamento ‘ $p$ ’

Terminado o processo de discretização do modelo, o utilizador deve definir o nível de refinamento ‘ $p$ ’ que pretende usar. Assim, o utilizador deve atribuir a ordem das funções que pretende ter nas bases de aproximação em cada domínio, através do vetor **Loops.order**, e o grau dos polinómios que pretende ter nas bases de aproximação de cada fronteira essencial, através do vetor **Edges.order**, de forma a obter um sistema estática e cinematicamente indeterminado.

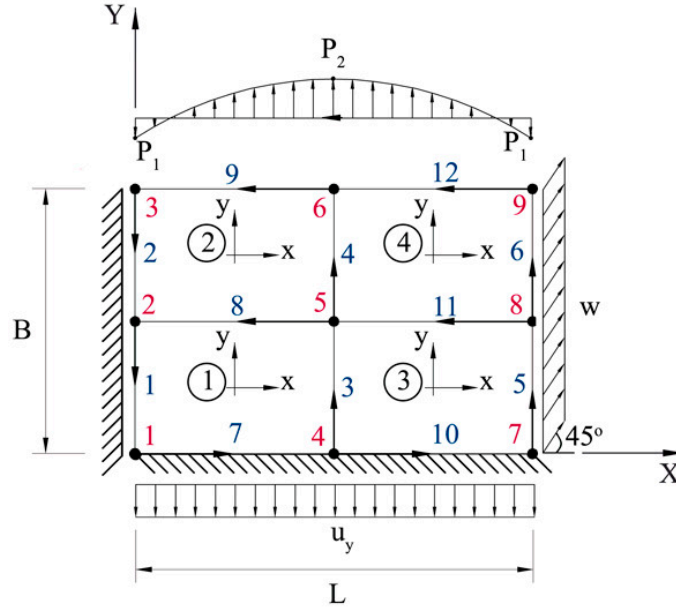
Pretende-se agora ilustrar a forma como o utilizador deve verificar a condição de sistema estática e cinematicamente indeterminado do modelo apresentado, fazendo a distinção desta última entre a aplicação ao nível do elemento e ao nível da estrutura.

Para o caso em estudo, opta-se pela utilização das mesmas ordens em todos os domínios e fronteiras essenciais do modelo. Estas ordens devem satisfazer as condições de indeterminação estática e cinemática, pelo que se optou pela sua satisfação ao nível de cada elemento (a satisfação ao nível estrutural fica assim implícita). A indeterminação estática no elemento menos restringido cinematicamente (elemento 4) impõe  $4N_{\Gamma} \geq 3$  ( $n_s = 4$ , ver figura D.2), logo,  $N_{\Gamma} \geq 1$ . A indeterminação cinemática no elemento mais restringido cinematicamente (elemento 1) impõe  $4N_D + 2 \geq 7N_{\Gamma}$  ( $n_s = 7$ , ver figura D.2).

Para respeitar as duas condições apresentadas, e tendo em conta a discretização do modelo apresentada na figura D.2, listam-se na tabela D.1 algumas das combinações de refinamentos que garantem as indeterminações estática e cinemática ao nível de cada elemento e ao nível da estrutura ( $n_s = 14$ , ver figura D.2), quantificando, para cada uma, os respetivos números de indeterminação ( $\alpha$  refere-se à indeterminação estática e  $\beta$  à indeterminação cinemática).

**Tabela D.1:** Números de indeterminação estática e cinemática ao nível de cada elemento e ao nível estrutural.

Ordens das bases		Elemento 1		Elemento 2		Elemento 3		Elemento 4		Estrutura	
$n_D$	$n_{\Gamma}$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
5	1	11	8	7	12	9	10	5	14	16	60
7	2	18	9	12	15	15	12	9	18	30	78
9	3	25	10	17	18	21	14	13	22	44	96
11	4	32	11	22	21	27	16	17	26	58	114



**Figura D.2:** Discretização do modelo em estudo. A numeração a vermelho indica os nós, a numeração a azul indica as fronteiras e a numeração a preto indica os elementos.

Torna-se então importante referir que as indeterminações estáticas e cinemáticas são condições necessárias, mas não suficientes para garantir um sistema cinematicamente indeterminado. Para tal, deve ser ainda garantido que  $n_T < n_D$ . Pela análise da tabela D.1 verifica-se que esta condição é respeitada para todos os níveis de refinamento apresentados.

Então, particularizando para o exemplo em estudo, a ordem e grau escolhidos para as bases do domínio e fronteira do modelo que garantem a satisfação desta condição ao nível do elemento, são definidos pelo utilizador da seguinte forma,

$$\begin{cases} n_T = \text{Edges.order}(\text{Edges.type} == 'D') = 4 \\ n_D = \text{Loops.order}(:) = 11 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

#### D.2.4 Definição das condições de fronteira

Atribuído o refinamento ao modelo, o utilizador deve definir as condições de fronteira que pretende aplicar.

Tendo em conta o modelo apresentado na figura D.2, o utilizador deve definir a fronteira  $Y = 0$  como uma fronteira de Dirichlet (**edges.type** = 'D') e impor condições de fronteira de Dirichlet na direção normal e tangencial à fronteira (**BConds.Dirichlet**) (deslocamentos impostos,  $u_n = 1$  e  $u_t = 0$ ). Assim, o programa aproxima o campo das forças e impõe explicitamente a compatibilidade nas direções normal e tangencial à fronteira.

Para a fronteira  $X = 0$ , o utilizador deve definir a mesma como uma fronteira de Dirichlet (**edges.type** = 'D'). Neste caso, a compatibilidade na direção normal à fronteira é imposta explicitamente enquanto que na direção tangencial à fronteira, as forças impostas são conhecidas, não havendo, por isso, condições cinemáticas a aplicar. Dado que as forças tangenciais (em geral as



provocadas pelo atrito contra a envolvente do meio) são, geralmente, desprezáveis em aplicações estruturais, o programa não permite, na sua atual versão, definir valores não nulos para as forças tangenciais às fronteiras definidas como encastramentos deslizantes. Então, o utilizador deve definir as condições de fronteira como Dirichlet na direção normal (**BConds.Dirichlet**) e de Neumann (**BConds.Neumann**) na direção tangencial. Assim, aproximam-se apenas as forças na sua direção normal e não na sua direção tangencial à fronteira. Note-se que a limitação acima referida não advém da formulação, sendo apenas própria à presente implementação computacional.

Para as fronteiras  $Y = 2$  e  $X = 3$ , o utilizador deve definir as fronteiras como fronteiras de Neumann (**edges.type= 'N'**), aplicando as respetivas solicitações ao modelo nas direções normal e tangencial à fronteira (**BConds.Neumann**). Assim, para a formulação adotada no presente trabalho, o programa não aproxima nenhuma quantidade.

De seguida, apresentam-se, de forma esquemática, os procedimentos descritos nos parágrafos anteriores que o utilizador deve seguir no processo de definição das condições de fronteira.

Inicialmente, o utilizador deve definir o tipo de fronteiras da malha. Para o modelo da figura D.2, o utilizador deve proceder da seguinte forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Edges.type}(5) = 'N' \\ \text{Edges.type}(6) = 'N' \\ \text{Edges.type}(9) = 'N' \\ \text{Edges.type}(12) = 'N' \end{array} \right. \quad (\text{D.5})$$

Apresenta-se de seguida, a forma como o utilizador deve definir no programa as condições de fronteira do modelo representado na figura D.2. De notar que estas são aplicadas segundo a convenção positiva dos sinais, descrita na secção C.3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BConds.Dirichlet}(1:2,1) = \{0\} \\ \text{BConds.Neumann}(1:2,2) = \{0\} \end{array} \right. \quad (\text{D.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BConds.Dirichlet}(7:3:10,1) = \{1\} \\ \text{BConds.Dirichlet}(7:3:10,2) = \{0\} \end{array} \right. \quad (\text{D.7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BConds.Neumann}(5:6,1) = \left\{ \frac{10}{\sqrt{2}} \right\} \\ \text{BConds.Neumann}(5:6,2) = \left\{ \frac{10}{\sqrt{2}} \right\} \end{array} \right. \quad (\text{D.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BConds.Neumann}(9,1) = \{[20 \quad 0 \quad -3]\} \\ \text{BConds.Neumann}(9,2) = \{0\} \end{array} \right. \quad (\text{D.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BConds.Neumann}(12,1) = \{[-3 \quad 0 \quad 20]\} \\ \text{BConds.Neumann}(12,2) = \{0\} \end{array} \right. \quad (\text{D.10})$$

### D.2.5 Definição do número de pontos de Gauss e do número de divisões

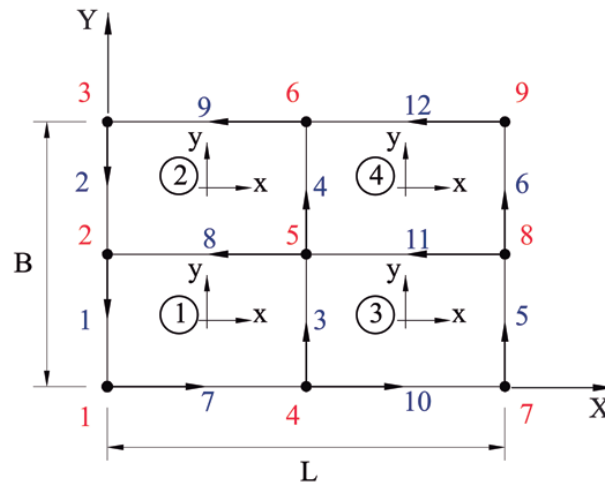
Finalmente, o utilizador deve definir o número de pontos de Gauss-Legendre que pretende ter nas fronteiras do elemento,  $NGP = 10$ , e o número de divisões em que pretende dividir o domínio para a representação gráfica dos campos da solução,  $NoDiv = 30$ .

## D.3 Organização dos dados

Depois de inseridos os dados de entrada por parte do utilizador, através do gerador de malha (regular, no presente exemplo), são devolvidos os dados topológicos do modelo.

### D.3.1 Estruturas topológicas

Na figura D.3 apresenta-se o mesmo modelo da figura D.1, onde é possível verificar a forma como o programa organiza a informação topológica do modelo.



**Figura D.3:** Modelo composto por quatro elementos com a convenção de sinais positiva definida pelo programa.

No caso concreto do modelo apresentado na figura D.1, os dados topológicos são listados nas definições (D.11) a (D.14).

A matriz **NodeMap**, presente na definição (D.11), contém a listagem dos nós existentes no modelo.

$$\mathbf{NodeMap} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

A explicação detalhada das definições (D.12) a (D.14) encontra-se no capítulo 4.

$$\mathbf{Nodes} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1.5 & 0 \\ 1.5 & 1 \\ 1.5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Nó 1} \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \rightarrow \text{Nó 9} \end{matrix} \quad (\text{D.12})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\begin{matrix} x & y \end{matrix}}$

$$\mathbf{loops\_nodes} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}; \mathbf{loops\_edges} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 10 & 11 & 3 \\ 6 & 12 & 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Elemento 1} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{Elemento 4} \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Nós}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Fronteiras}}$

(D.13)

$$\mathbf{edges\_nodes} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 8 & 9 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \\ 4 & 7 \\ 8 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}; \mathbf{edges\_loops} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Fronteira 1} \\ \\ \vdots \\ \rightarrow \text{Fronteira 12} \end{matrix} \quad (\text{D.14})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\begin{matrix} \text{Nó} & \text{Nó} \\ \text{inicial} & \text{final} \end{matrix}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\begin{matrix} \text{Elemento} & \text{Elemento} \\ \text{à esquerda} & \text{à direita} \end{matrix}}$

### D.3.2 Estruturas de dados

Definido o modelo, o programa organiza a informação e constrói as estruturas de dados **Edges**, **Loops** e **BConds**.

### Edges

De seguida listam-se as matrizes e vetores constituintes da estrutura **Edges** para o modelo da figura D.3.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Edges.nini} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} & ; \text{Edges.nfin} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{Fronteira 1} \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \rightarrow \text{Fronteira 12} \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{Nó inicial}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{Nó final}}
 \end{array} \quad (D.15)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Edges.parametric} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1.5 & 0 \\ 3 & 1 & -1.5 & 0 \\ 3 & 2 & -1.5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{Fronteira 1} \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \rightarrow \text{Fronteira 12} \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{Definições paramétricas}} & & 
 \end{array} \quad (D.16)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Edges.lleft} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & ; \text{Edges.lright} = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Fronteira 1} \\ \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \rightarrow \text{Fronteira 12} \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 \text{Elemento à} & & \text{Elemento à} \\
 \text{esquerda} & & \text{direita}
 \end{array} \quad (D.17)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Edges.type} = \begin{bmatrix} 'D' \\ 'D' \\ 'D' \\ 'D' \\ 'N' \\ 'N' \\ 'D' \\ 'D' \\ 'N' \\ 'D' \\ 'D' \\ 'N' \end{bmatrix} & ; \text{Edges.order} = & \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ NaN \\ NaN \\ 4 \\ 4 \\ NaN \\ 4 \\ 4 \\ NaN \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Fronteira 1} \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \rightarrow \text{Fronteira 12} \end{array} \\
 & & \vdots
 \end{array} \quad (D.18)$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{Edges.insert} = \begin{bmatrix} 185 & 0 \\ 190 & 0 \\ 195 & 200 \\ 205 & 210 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 215 & 220 \\ 225 & 230 \\ 0 & 0 \\ 235 & 240 \\ 245 & 250 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \text{Normal} \quad \text{Tangencial}
 \end{array}
 \quad ; \mathbf{Edges.dim} = \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{array}{c} \rightarrow \text{Fronteira 1} \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \rightarrow \text{Fronteira 12} \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{Normal} \quad \text{Tangencial}$$

(D.19)

### Loops

De seguida listam-se as matrizes e vetores constituintes da estrutura **Loops** para o modelo da figura D.3.

$$\mathbf{Loops.nodes} = \mathbf{loops\_nodes} \quad (\text{Equação D.13}) \quad (\text{D.20})$$

$$\mathbf{Loops.edges} = \mathbf{loops\_edges} \quad (\text{Equação D.13}) \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{Loops.center} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.75 & 1.5 \\ 2.25 & 0.5 \\ 2.25 & 1.5 \end{bmatrix} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x \quad y}
 \end{array}
 ; \mathbf{Loops.area} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}
 ; \mathbf{Loops.order} = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c} \rightarrow \text{Elemento 1} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{Elemento 4} \end{array}$$

(D.22)

$$\mathbf{Loops.materials} = \begin{bmatrix} 30 & 0.2 & 31.25 & 6.25 & 12.50 \\ 30 & 0.2 & 31.25 & 6.25 & 12.50 \\ 30 & 0.2 & 31.25 & 6.25 & 12.50 \\ 30 & 0.2 & 31.25 & 6.25 & 12.50 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c} \rightarrow \text{Elemento 1} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{Elemento 4} \end{array}$$

Propriedades do material

(D.23)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Loops.insert} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 12 & 23 & 33 & 44 \\ 47 & 58 & 69 & 79 & 90 \\ 93 & 104 & 115 & 125 & 136 \\ 139 & 150 & 161 & 171 & 182 \end{bmatrix}}_{\text{Modos de deslocamento}}; \mathbf{Loops.dim} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & 11 & 10 & 11 & 3 \\ 11 & 11 & 10 & 11 & 3 \\ 11 & 11 & 10 & 11 & 3 \\ 11 & 11 & 10 & 11 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{Modos de deslocamento}} \begin{matrix} \rightarrow \text{Elemento 1} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{Elemento 4} \end{matrix}
 \end{aligned}
 \tag{D.24}$$

### BConds

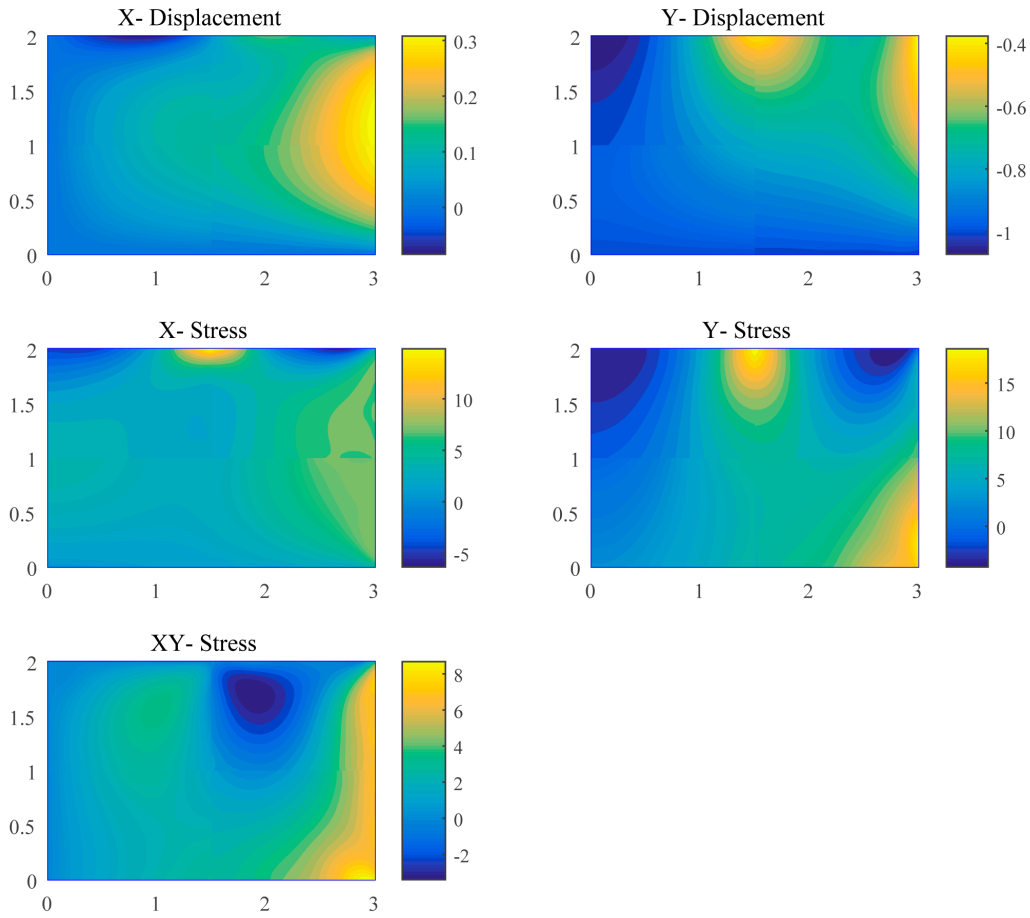
De seguida listam-se as matrizes constituintes da estrutura **BConds** para o modelo da figura D.3.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{BConds.Neumann} = \underbrace{\begin{bmatrix} NaN & 0 \\ NaN & 0 \\ NaN & NaN \\ NaN & NaN \\ 7.07 & 7.07 \\ 7.07 & 7.07 \\ NaN & NaN \\ NaN & NaN \\ [20 \ 0 \ -3] & 0 \\ NaN & NaN \\ NaN & NaN \\ [-3 \ 0 \ 20] & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Normal} \quad \text{Tangencial}}} \begin{matrix} \rightarrow \text{Fronteira 1} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{Fronteira 12} \end{matrix}
 \end{aligned}
 \tag{D.25}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{BConds.Dirichlet} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & NaN \\ 0 & NaN \\ NaN & NaN \\ NaN & NaN \\ NaN & NaN \\ NaN & NaN \\ 1 & 0 \\ NaN & NaN \\ NaN & NaN \\ 1 & 0 \\ NaN & NaN \\ NaN & NaN \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Normal} \quad \text{Tangencial}}} \begin{matrix} \rightarrow \text{Fronteira 1} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{Fronteira 12} \end{matrix}
 \end{aligned}
 \tag{D.26}$$

## D.4 Representação gráfica dos resultados

Introduzidos os dados de entrada pelo utilizador, o programa determina os coeficientes do sistema resolutivo, constrói a solução e representa graficamente os campos que caracterizam a resposta estrutural às ações impostas. Na figura D.4, representam-se os campos das tensões ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ ) e os campos dos deslocamentos ( $u_x$  e  $u_y$ ), para o modelo de 4 elementos com bases de aproximação  $n_D = 11$  e  $n_\Gamma = 4$ .



**Figura D.4:** Representação gráfica dos resultados obtidos pelo programa de EFHT.

Posteriormente à representação gráfica dos campos da solução, o programa determina a energia de deformação (Energy) do modelo. Para o exemplo em estudo, obtém-se Energy = 7.4036.